古谷数学教室第 6 回

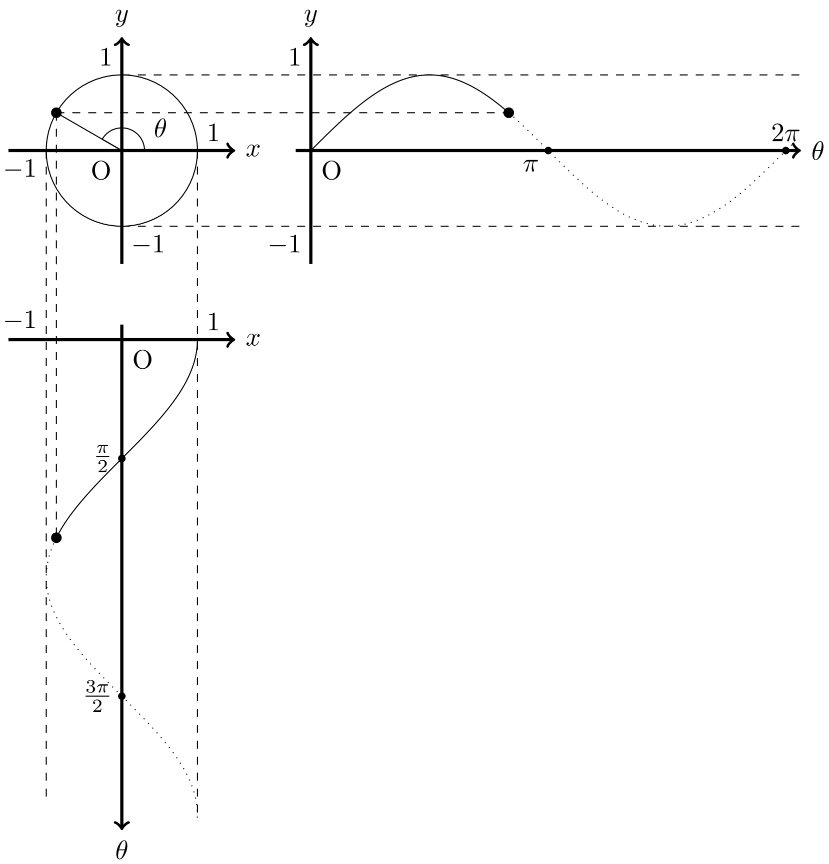
三角関数 2

2025 年 4 月 30 日

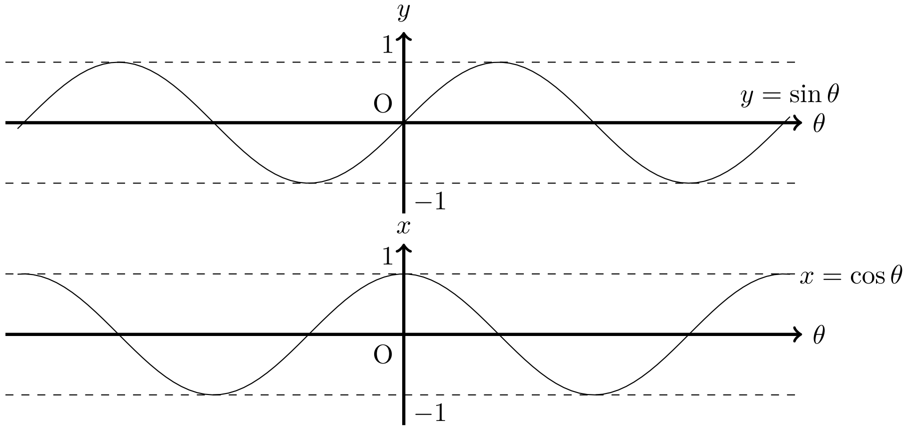
1　基礎事項

1.1　三角関数のグラフ

一般角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、$\sin\theta = y$、$\cos\theta = x$ である。これより、関数 $y = \sin\theta$、$x = \cos\theta$ のグラフをかくと、次のようになる。



$y = \sin\theta$ と $x = \cos\theta$ を見やすく並べると、以下の図のようになる[1)] 。



動径は 1 回転するともとの位置にもどるから、次が成り立つ：

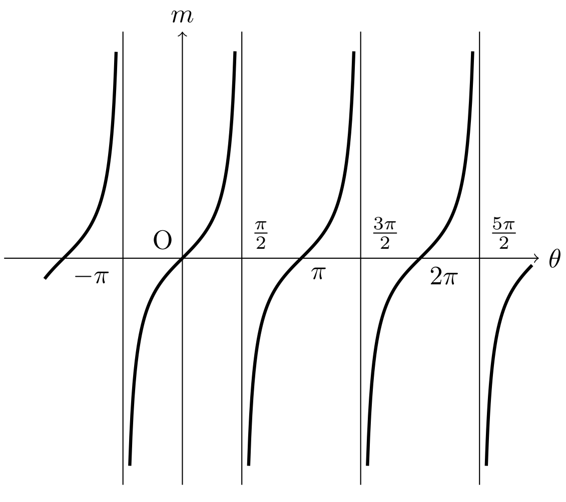
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta.$$

この性質により、関数 $\sin\theta$、$\cos\theta$ はいずれも 2π の**周期**をもつ[2)] という。

グラフについていうと、$y = \sin\theta$、$y = \cos\theta$ のグラフは、いずれも 2π ごとに同じ形を繰り返す。さらに、次のことがいえる[3)] ：

$$\sin\theta = -\sin(-\theta), \quad \cos\theta = \cos(-\theta).$$

関数 $y = \tan\theta$ のグラフについても調べる。一般角 θ の動径と単位円の交点を P とし、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T$(1,\ m)$ とすると、$\tan\theta = m$ である。これより、関数 $m = \tan\theta$ のグラフをかくと、次のようになる。



1) $y = \sin\theta$ のグラフの形を**正弦曲線**または**サインカーブ**という。$y = \cos\theta$ の正弦曲線であることがわかる。

2) 一般に、関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して、常に $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき、関数 $f(x)$ は p を周期とする**周期関数**であるという。このとき、$2p$、$3p$、$-p$ なども周期であるが、周期関数の周期といえば、ふつう正の周期のうち最小のものをさす。

3) 日本語にすると、$y = \sin\theta$ のグラフは原点に関して対称である、$y = \cos\theta$ のグラフは y 軸に関して対称である、ということを言っている。これは、納得するまで考えること。

$\tan\theta$ は、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ では定義されないが、$y = \tan\theta$ のグラフは θ が $\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくと、直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。グラフが限りなく近づく直線を、そのグラフの**漸近線**という。関数 $y = \tan\theta$ には、次のような性質がある：

$$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

また、漸近線をもつ。

k を正の定数とする。三角関数の周期について、一般に、次のが成り立つ：

$$\begin{aligned} \sin(k\theta+2\pi) &= \sin k\theta, \\ \cos(k\theta+2\pi) &= \cos k\theta, \\ \tan(k\theta+\pi) &= \tan k\theta. \end{aligned}$$

1.2　三角関数の性質

次の等式が成り立つ[4]：

$$\begin{aligned} \sin(\theta+\pi) &= -\sin\theta, \\ \cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta, \\ \tan(\theta+\pi) &= \tan\theta, \\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\theta, \\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\theta, \\ \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{\tan\theta}. \end{aligned}$$

1.3　三角関数の加法定理

一般に、正弦、余弦について、次の**加法定理**が成り立つ：

正弦、余弦の加法定理

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

4）　なぜ成り立つのか、自分で考えよ。

証明　座標平面における単位円上の点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$、$\mathrm{Q}\big(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta)\big)$、$\mathrm{R}\big(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)\big)$、$\mathrm{S}(1,\ 0)$ について、

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{RS}^2$$

より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

が得られ[5]、これより

$$\cos\big(\alpha-(-\beta)\big)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

が得られ[6]、$\cos(-\beta)=\cos\beta$、$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

が得られる。さらに、$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$、$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ より

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

が得られ、

$$\sin\big(\alpha+(-\beta)\big)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\cos(-\beta)$$

が得られる。以上より、

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\quad\blacksquare$$

正弦、余弦の加法定理から、次の正弦の加法定理が得られる：

正接の加法定理

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

5）おそらく、ほとんどの学生さんがそうだろうと思うのだが、この式をみて、一瞬で納得できない学生さんへコメントをする。参考書や問題集などで、なぜそれが成り立つのか理解できない場合、「この参考書（問題集）は説明不足だ！」や「分かりにくい！」などと早い段階で諦めてしまうのはもったいない。（そもそも、理解もできていない段階で「分かりにくい」と判断することはできない。「分かっていない」の言い間違いである。）式変形が理解できないとき、それは問題を解くヒントのようなものだと思って、自分で正しいことを確認する癖をつけることを強く勧める。

6）$-\beta\to\beta$ と読み替えればよい。

証明　$\tan(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha\pm\beta)/\cos(\alpha\pm\beta)$ を利用して、分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ることにより得られる　■

1.4　加法定理の応用

加法定理から明らかに次が成り立つ[7]：

2 倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

また、$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ について、$\alpha \to \dfrac{\alpha}{2}$ と置き換えると、次の式が得られる：

半角の公式

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2},\\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2},\\ \tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.\end{aligned}$$

$a\sin\theta + b\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することを、三角関数を**合成**するという：

三角関数の合成

$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$、$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$ とするとき、

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

$a = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$、$b = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$ とおけば、$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ と合成できる。

7）　証明はかならず自分ですること。

2　例題

1. θ の動径が第 3 象限にあり、$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき、$\sin\theta$、$\tan\theta$ の値を、それぞれ求めよ。

2. θ の動径が第 4 象限にあり、$\tan\theta = -2$ のとき、$\sin\theta$、$\cos\theta$ の値を、それぞれ求めよ。

3. 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1) $y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $y = 2\sin\theta$

(3) $y = \sin 2\theta$

4. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $2\cos\theta - 1 = 0$ を解け。

5. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $2\sin\theta + 1 = 0$ を解け。

6. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、不等式 $\cos\theta \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。また、不等式 $\cos\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。

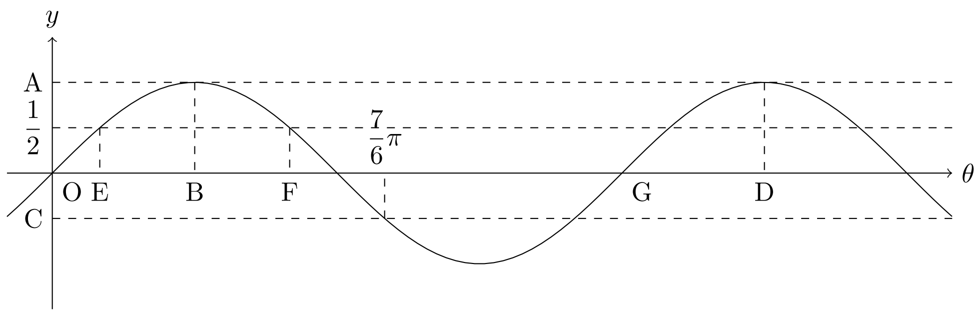
7. 加法定理を利用することにより、2 倍角の公式、半角の公式を証明せよ。

8. 次の関数の最大値、最小値を求めよ：

$$y = \sin x + \cos x.$$

3　演習問題

1. 下の図は、関数 $y = \sin\theta$ のグラフである。図中の目盛り A から G の値を求めよ。



2. 次の関数の周期を求め、グラフをかけ。また、それぞれ [　] 内のグラフとどのような位置関係にあるか答えよ。

(1) $y = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$　$[y = \cos\theta]$

(2) $y = \cos\theta - 1$　$[y = \cos\theta]$

(3) $y = 4\sin\theta$　$[y = \sin\theta]$

(4) $y = 2\sin 2\theta$　$[y = \sin\theta]$

3. 関数 $y = 3\cos(4\theta - 3\pi)$ のグラフは、$y = \cos 4\theta$ のグラフを θ 軸方向に α だけ平行移動し、θ 軸をもとにして y 軸方向に β 倍に拡大したものである。また、この関数の周期は γ である。このとき、α、β、γ を求めよ。

4. $y = 3\sin\left(3\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$ の関数のグラフをかけ。また、その周期を答えよ。

5. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。また、θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $2\sin\theta = -1$

(3) $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

6. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\cos\theta + \sqrt{2} > 0$

(3) $\tan\theta + \sqrt{3} < 0$

7. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 255^\circ$

(2) $\tan 195^\circ$

(3) $\cos\dfrac{13}{12}\pi$

8. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする。次の値を求めよ。

(1) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$ のとき、$\sin(\alpha+\beta)$、$\tan(\alpha+\beta)$

(2) $\tan\alpha = 1$、$\tan\beta = -2$ のとき、$\tan(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha-\beta)$

9. $y = \dfrac{3}{2}x$ と $y = -5x$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

10. 次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$、$\sin\alpha = \dfrac{5}{6}$ のとき、$\cos 2\alpha$、$\sin 2\alpha$、$\tan 2\alpha$

(2) $\tan\alpha = 4$ のとき、$\tan 2\alpha$、$\cos 2\alpha$、$\sin 2\alpha$

(3) $\sin\dfrac{\pi}{12}$

(4) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$、$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ のとき、$\sin\dfrac{\alpha}{2}$、$\cos\dfrac{\alpha}{2}$、$\tan\dfrac{\alpha}{2}$

(5) $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$、$\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ のとき、$\cos\alpha$、$\sin\dfrac{\alpha}{2}$、$\cos\dfrac{\alpha}{2}$、$\tan\dfrac{\alpha}{2}$

11. 次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

(2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$

12. 次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、$r > 0$、$-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

(1) $-2\sin\theta + 2\cos\theta$

(2) $\sqrt{6}\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta$

(3) $3\sin\theta + 4\cos\theta$

13. $\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

14. $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の関数 $y = \sin x - \cos x$ の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。