古谷数学教室第 8 回

平面ベクトル 2、空間ベクトル

2025 年 5 月 14 日

1　基礎事項

1.1　位置ベクトル

平面上で、点 O を定めておくと、どんな点 P の位置も、ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる。このようなベクトル $\vec{p}$ を、点 O に関する点 P の**位置ベクトル**という。また、位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を、$\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。

2 点の位置ベクトルが同じならば、その 2 点は一致する。

位置ベクトルにおける点 O は、平面上のどこに定めてもよい。以下、とくに断らない限り、1 つ定めた点 O に関する位置ベクトルを考える。

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して、線分 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$、$m:n$ に外分する点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする。一般に、次のことが成り立つ：

内分点・外分点の位置ベクトル

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n},$$
$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}.$$

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$、$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は、

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

1.2　ベクトルの図形への応用

異なる 2 点 A、B を通る直線 AB 上に点 C があるとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が平行であるか、または、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{0}$ である。

したがって、次のことが成り立つ：

$$「点 \mathrm{C} が直線 \mathrm{AB} 上にある」\Longleftrightarrow「\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} となる実数 k がある」.$$

1.3 図形のベクトルによる表示

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り、ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする。直線 g 上のどんな点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対しても、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$ となる実数 t がただ 1 つ定まる。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから、次の式が得られる：

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}. \tag{1}$$

式 (1) において、t がすべての実数値をとって変化すると、点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の全体は直線 g になる。式 (1) を直線 g の**ベクトル方程式**といい、実数 t を**媒介変数**という。また、$\vec{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という。

O を原点とする座標平面上で、点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y)$ を通り、$\vec{d} = (d_x,\ d_y)$ に平行な直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。これより、ベクトル方程式 (1) から

$$\begin{cases} x = a_x + td_x \\ y = a_y + td_y \end{cases} \tag{2}$$

が得られる。式 (2) を、直線 g の**媒介変数表示**という。式 (2) から t を消去すると、次の式を得る：

$$d_y(x - a_x) - d_x(y - a_y) = 0.$$

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通る直線 g 上に A と異なる点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ があるとき、式 (1) で

$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

とすると、直線 g 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ について、次の式が得る：

$$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}. \tag{3}$$

式 (3) において、$1-t = s$ とすると、$0 \leq t \leq 1$ のとき、≥ 0 であるから、次の式を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の存在範囲は、線分 AB である：

$$\begin{cases} \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \\ s + t = 1 \\ s \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}.$$

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線を g とする。直線 g 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が A に一致しないとき、$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ となり、次の式を得る：

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0. \tag{4}$$

P が A に一致するときは、$\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$ であるから、このときも式 (4) は成り立つ。

式 (4) は、点 A$(\vec{a})$ を通り、$\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式である。直線 g に垂直なベクトル $\vec{n}$ を、直線 g の**法線ベクトル**という。

式 (2) のときと同様に、点 A$(a_x,\ a_y)$ を通り、$\vec{n} = (n_x,\ n_y)$ に垂直な直線方程式は

$$n_x(x - a_x) + n_y(y - a_y) = 0$$

である。

点 A$(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円を考える。この円上のどんな点 P$(\vec{p})$ に対しても、次の式が成り立つ：

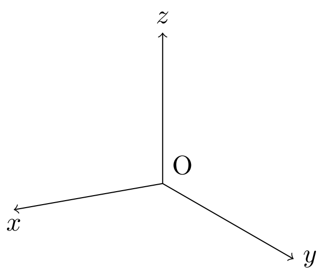
$$|\vec{p} - \vec{a}| = r. \tag{5}$$

これより、次の円のベクトル方程式を得る：

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2.$$

1.4　空間の点

空間に点 O をとり、O で互いに直交する 3 本の数直線を、下の図のように定める。



x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面、y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面、z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面といい、これらをまとめて**座標平面**という。

空間の点 P に対して、P を通り、各座標軸に垂直な平面が、x 軸、y 軸、z 軸と交わる点を、それぞれ A、B、C の各座標軸上での座標が、それぞれ a、b、c のとき、3 つの実数の組 (a, b, c) を点 P の**座標**といい、a、b、c をそれぞれ点 P の x 座標、y 座標、z 座標という。この点 P(a, b, c) と書くことがある。座標の定められた空間を**座標空間**という。

原点と点 P$(a,\ b,\ c)$ の距離は、

$$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

である。

1.5　空間のベクトル

空間において、始点 A、終点 B とする。有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す。

つまり、空間のベクトルも平面と同様に表す。

空間において、同じ平面上にない 4 点 O、A、B、C が与えられ、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も、適当な実数 s、t、u を用いて次のように表せる：

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}.$$

1.6 ベクトルの成分

座標空間において、$\vec{a} = \overline{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ であるとする。このとき、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

が成り立つ。

平面上の場合と同様に、空間のベクトルの和、差、実数倍の成分表示について次のことが成り立つ：

和、差、実数倍

$$(a_x,\ a_y,\ a_z) \pm (b_x,\ b_y,\ b_z) = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z),$$
$$k(a_x,\ a_y,\ a_z) = (ka_x,\ ka_y,\ ka_z).$$

ただし、k は実数である。

1.7 ベクトルの内積、外積

空間ベクトルの内積も、平面ベクトルと同様である。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

とする。外積の定義は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2 \\
&= ({a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2)({b_x}^2+{b_y}^2+{b_z}^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta) \quad (\text{ただし } \theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

である。$|\vec{a}\times\vec{b}|\geq 0$ なので、

$$
|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta
$$

となる。

1.8　座標空間における図形

明らかに、次のことがいえる：

座標平面に平行な平面の方程式

点 $\mathrm{A}(\alpha,\ 0,\ 0)$ を通り、yz 平面に平行な平面の方程式は $x=\alpha$.

球面の方程式

点 $(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$
(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.
$$

2　演習問題

1. 2 点 A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB について、次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $3:5$ に内分する点

(2) $3:5$ に外分する点

2. $\triangle$ABC の辺 BC、CA を $2:3$ に内分する点をそれぞれ D、E、$\triangle$ABC の重心を G とする。次のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

3. 六角形 ABCDEF の各辺の中点を順に L、M、N、P、Q、R とするとき、$\triangle$LNQ の重心と $\triangle$MPR の重心は一致することを証明せよ。

4. $\triangle$ABC の重心 G、同じ平面上の任意の点を P とするとき、等式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ が成り立つことを証明せよ。

5. 3 点 $(1,\ x)$、$(x,\ 0)$、$(-1,\ 6)$ が一直線上にあるように、x の値を定めよ。

6. $\angle$A が直角である直角二等辺三角形 ABC の 3 つの辺 BC、CA、AB を $3:2$ に内分する点をそれぞれ L、M、N とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$、$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ を $\vec{b}$、$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AL}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ であることを示せ。

7. $\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。等式 $s\vec{a}+(3-2t)\vec{b}=\vec{0}$ を満たす実数 s、t の値を求めよ。

8. 点 A$(2,\ -1)$ を通り、$\vec{d}=(-1,\ 2)$ が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、t を消去した式で表せ。

9. 次の 2 点 A(2, 4)、B(1, -1) を通る直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、t を消去した式で表せ。

10. 次の点 A(1, 2) を通り、$\vec{n}=(1,\ -2)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

11. 次のような円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

(1) 点 C(3, 2) が中心で、点 A(1, 1) を通る円

(2) 2 点 A(1, 4)、B(3, 0) を直径の両端とする円

12. 2 直線 $2x+4y+1=0$、$x-3y+7=0$ のなす鈍角 α を求めよ。

13. 点 P(-3, 6, -5) から、xy 平面、yz 平面、zx 平面に下ろした垂線をそれぞれ PL、PM、PN とするとき、3 点 L、M、N の座標を求めよ。

14. xy 平面、z 軸、原点に関して、点 (-2, -3, 4) と対称な点の座標を求めよ。

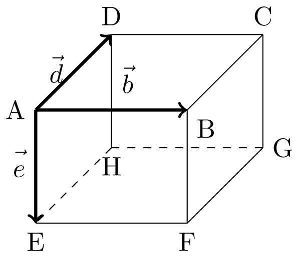
15. 2 点 A(1, -2, 3)、B(3, 2, -2) の 2 点間距離を求めよ。

16. 3 点 A(1, 2, 3)、B(3, 1, 5)、C(2, 4, 3) を頂点とする △ABC はどのような三角形か答えよ。

17. 3 点 A(3, 1, 2)、B(-1, 3, 0)、C(2, -1, 1) から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

18. 正四面体の 3 つの頂点が A(0, 1, -2)、B(3, 4, -2)、C(0, 4, 1) であるとき、第 4 の頂点 D の座標を求めよ。

19. 下の図のような平行六面体 ABCD − EFGH において、次のベクトルを $\vec{b}$、$\vec{d}$、$\vec{e}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

20. 四面体 ABCD において、等式 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ が成り立つことを証明せよ。

21. $\vec{a} = (1,\ -1,\ 2)$、$\vec{b} = (0,\ 2,\ 1)$ のとき、ベクトル $2\vec{a} + 3\vec{b}$ を成分表示せよ。

22. B$(1,\ -1,\ 1)$、C$(2,\ 1,\ -1)$ のとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を成分表示せよ。また、その大きさを求めよ。

23. $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$、$\vec{b} = (0,\ 2,\ 5)$、$\vec{c} = (1,\ 3,\ 2)$ のとき、ベクトル $\vec{p} = (0,\ 3,\ 12)$ を $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形に表せ。