

古谷数学教室第 9 回

式と証明、図形と方程式 1

2025 年 5 月 28 日

1 基礎事項

1.1 3 次式の展開と因数分解

次の 3 次式の展開は有名である：

展開の公式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

これらの展開を逆に利用すると、3 次式の因数分解である。

1.2 二項定理

次の二項定理も有名である¹⁾：

二項定理

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + \cdots + {}_nC_n a^0 b^n.$$

1) 浜辺美波さん、永野芽郁さん、広瀬すずさんが、それぞれチョコ A とチョコ B を持っているとする。この 3 人から 1 つずつチョコレートをもらうとき、チョコ A を 2 つ、チョコ B を 1 つ受け取る受け取り方は全部で何通りか。もちろん、浜辺美波さん、永野芽郁さん、広瀬すずさんは区別できる。そのため、同じチョコ A でも、浜辺美波さんからもらったチョコ A と永野芽郁さんからもらったチョコ A は区別するものとする。これは、チョコ A を手作りチョコと言い換えて、チョコ B を購入チョコと読み換えても、求める場合の数は変わらない。この例題でも、二項定理と同様に考えることができ、 ${}_3C_1$ 通りである。「二項定理と同様？」と思う学生さん向けに解説をする。チョコ A は a に、チョコ B は b 、に対応、そして、人物はそれぞれ $(a + b)$ に対応する。そうすると、 $(a + b)^3$ の展開を考えると、 $(a + b)$ の項（人）から a または b の単項式（A または B のチョコ）をそれぞれかける項を全部書き出す（受け取る受け取り方をすべて書き出す）ことに対応する。

1.3 整式の割り算

A 、 B が同じ 1 つの文字についての整式²⁾ で、 B は 0 でないとする。このとき、 A を B で割った商と余りを求めるとは、次の等式を満たす整式 Q 、 R を求めることである：

$$A = BQ + R,$$

ただし、 R は 0 か、 B より次数の低い整式である。 A 、 B に対して、 Q 、 R は 1 通りに定まり、 Q を商、 R を余りという。とくに、 $R = 0$ のとき、 A は B で割り切れるという。

1.4 分数式とその計算

たとえば、 $\frac{2}{x}$ 、 $\frac{2x+5}{x+1}$ などのように、2 つの整式³⁾ A 、 B ⁴⁾ によって $\frac{A}{B}$ の形で表され、 B に文字を含む式を、**分数式**という。分数式 $\frac{A}{B}$ において、 B をその**分母**、 A をその**分子**という。分数式では、次のように、その分母と分子に 0 以外の同じ整式をかけても、分母と分子を共通因子で割っても、もとの式と等しい：

分数式の約分

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC},$$
$$\frac{AD}{BD} = \frac{A}{B},$$

ただし、 $C \neq 0$ とした。

分数式の分母と分子をその共通因子で割ることを**約分**するという。それ以上約分できない分数式を**既約分数式**⁵⁾ という。

分数式の四則演算は、分数の場合と同じように行う：

2) 文字の種類が 2 つのときは、どちらかの文字についての整式とみて割り算を行うこともある。3 つ以上も同様である。

3) 多項式と読み換えてもよい。

4) $B \neq 0$ とする。

5) 「きやくぶんすうしき」と読む。

分数式の四則演算

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} &= \frac{AC}{BD}, \\ \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} &= \frac{AD}{BC}, \\ \frac{A}{C} + \frac{B}{C} &= \frac{A+B}{C}, \\ \frac{A}{C} - \frac{B}{C} &= \frac{A-B}{C}.\end{aligned}$$

分母が異なる分数式の加法、減法では、分数式の分母を同じにして計算する。2 つ以上の分数式の分母を同じにすることを**通分**するという。

1.5 恒等式

文字を含む等式において、その両辺の値が存在する限り、含まれている文字にどのような値を代入しても等式が常に成り立つとき、その等式をそれらの文字についての**恒等式**という。

恒等式の両辺が x についての整式のとき、各辺で同類項を整理すると両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。たとえば、次のことが成り立つ：

恒等式の性質

1. 「 $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式である」 $\iff a = a'$ かつ $b = b'$ かつ $c = c'$,
2. 「 $ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である」 $\iff a = b = c = 0$.

1.6 等式の証明

等式 $A = B$ を証明するには、たとえば次のような方法がある：

等式の証明

1. A か B の一方を変形して、他方を導く。
2. A と B の両方を変形して、同じ式を導く。
3. $A - B$ を変形して、0 になることを示す。

1.7 不等式の証明

不等式では、とくに断らない限り、文字は実数を表すものとする。

2つの実数 a, b については、 $a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$ のうち、どれか一つの関係だけが成り立つ。また、実数の大小関係について、次の基本性質が成り立つ：

不等式の性質

$$a > b \text{ かつ } b > c \implies a > c,$$

$$a > b \implies a + c > b + c,$$

$$a > b \text{ かつ } c > 0 \implies ac > bc,$$

$$a > b \text{ かつ } c < 0 \implies ac < bc.$$

二つの数 a, b の大小関係と差 $a - b$ について、次のことが成り立つ：

二つの数の大小関係と差

$$a > b \iff a - b > 0,$$

$$a < b \iff a - b < 0.$$

これより、不等式 $A > B$ を証明するには、 $A - B > 0$ であることを示せばよい。

a, b を実数とする。実数の平方について、次の性質が成り立つ：

実数の平方の性質

$$a^2 \geq 0,$$

ただし、等号が成り立つのは $a = 0$ のときである。

$$a^2 + b^2 \geq 0,$$

ただし、等号が成り立つのは $a = b = 0$ のときである。

$a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

において、 $a + b > 0$ であるから、 $a^2 - b^2$ と $a - b$ の符号は同じである⁶⁾。したがって、 $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、次のことが成り立つ：

平方の大小関係

$$a^2 > b^2 \iff a > b,$$

$$a^2 \geq b^2 \iff a \geq b.$$

このことは、 $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ のときも成り立つ¹⁾。

1) $a = 0$ 、 $b = 0$ のときも成り立つことを理解することはとても難しい。

実数の絶対値について、次の性質が成り立つ：

$$|a| \geq 0,$$

$$|a| \geq a,$$

$$|a| \geq -a,$$

$$|a|^2 = a^2,$$

$$|ab| = |a||b|.$$

二つの数 a 、 b について、 $\frac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という。また、 $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、 $\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という。

$a > 0$ 、 $b > 0$ とする。相加平均と相乗平均について、次が成り立つ：

相加平均と相乗平均の大小関係

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

ただし、等号が成り立つのは $a = b$ のときである。

1.8 直線上の点

数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、 a を点 P の**座標**といい、座標が a である点 P を $P(a)$ で表す。数直線上の原点 O と点 $P(a)$ の距離 OP は、 a の絶対値 $|a|$ で表される。一般に、2 点 $A(a)$ 、 $B(b)$ 間の距離 AB は、次の式で表される：

$$AB = |b - a|.$$

6) こういう文章に出会ったとき、「ふーん。」と流してしまう学生さんは、数学が得意になる種の一つ逃したと思ってよい。「ほんとな？」と自分で確かめることがとても大切である。

m, n は正の数とする。線分 AB 上の点 P が

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という。また、線分 AB の延長線上の点 Q が

$$AQ : QB = m : n \quad (m \neq n)$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という。点 P を線分 AB の**内分点**、点 Q を線分 AB の**外分点**という。

2 点 $A(a), B(b)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を P 、外分する点を Q とする。このとき、一般に、次のことが成り立つ：

線分の内分点、外分点

$$P\left(\frac{na + mb}{m + n}\right), \\ Q\left(\frac{-na + mb}{m - n}\right).$$

1.9 平面上の点

座標平面上の点 P の位置は、2 つの実数の組、たとえば (a, b) で表される。この組 (a, b) を点 P の座標といい、 a を x 座標、 b を y 座標という。また、座標が (a, b) である点 P を $P(a, b)$ で表す。

座標平面の座標軸によって 4 つの部分に分けられる。これらの各部分を**象限**といい、 $(+, +)$ 、 $(-, +)$ 、 $(-, -)$ 、 $(+, -)$ を含む象限をそれぞれ**第 1 象限**、**第 2 象限**、**第 3 象限**、**第 4 象限**という。ただし、 $+$ は任意の正の値、 $-$ は任意の負の値を意味するものとした。座標軸はどの象限にも含まない。

2 点 $A(a_x, a_y)$ 、 $B(b_x, b_y)$ とする。一般に、次のことが成り立つ：

2 点間の距離

$$AB = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

また、2 点 AB を、 $m : n$ に内分する点を P 、 $m : n$ に外分する点を Q とする。このとき、次のことが成り立つ：

内分点、外分点

$$\begin{aligned} P & \left(\frac{na_x + mb_x}{m + n}, \frac{na_y + mb_y}{m + n} \right), \\ Q & \left(\frac{-na_x + mb_x}{m - n}, \frac{-na_y + mb_y}{m - n} \right). \end{aligned}$$

2 例題

1. $x > y$ のとき、次の不等式を証明せよ：

$$2x + y > x + 2y.$$

2. 次の問は、数学を頑張っている陽香（はるか）さんの減点された答案例である。次の陽香さんの質問に答えよ。

(1) 陽香さんの質問 1：

ある問題を解いていて、 $1 = 2$ を示してしまいました。どこが間違いですか？条件は a 、 b は実数で、かつ $a = b$ でした。

$$a = b \tag{1}$$

$$2a = a + b \tag{2}$$

$$2(a - b) = a - b \tag{3}$$

両辺 $a - b$ で割ると

$$2 = 1 \tag{4}$$

(2) 陽香さんの質問 2：

ある問題を解いていて、以下の主張で減点されました。どこが間違いですか？条件は a 、 b は実数で、かつ $a < \sqrt{b}$ でした。

$$a < \sqrt{b} \tag{5}$$

なので

$$a^2 < b \tag{6}$$

となり...

[次ページに続く](#)

(3) 陽香さんの質問 3:

$a > 0$ 、 $b > 0$ とする。 $\left(a + \frac{2}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right)$ の最小値を求めよ。という問題で、私は以下のよう
に解答しました。

$$a + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}} \quad (\because a > 0, 2b^{-1} > 0) \quad (7)$$

$$\frac{1}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \quad (\because b > 0, a^{-1} > 0) \quad (8)$$

これより

$$\left(a + \frac{2}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right) \geq 4\sqrt{2} \quad (9)$$

よって与式の最小値は $4\sqrt{2}$

しかし、解答をみると最小値は別の値でした。私の式変形のどこ（具体的に的是には何番）が
間違っていますか？また、実際の最小値はなんですか？

3 演習問題

1. 次の式を展開せよ。

(1) $(a + 2)^3$

(2) $(2a - b)^3$

(3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

(4) $(5x - 2y)(25x^2 + 10xy + 4y^2)$

(5) $(x + 2y)^2(x^2 - 2xy + 4y^2)^2$

2. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 + 27$

(2) $8a^3 - 27b^3$

(3) $64x^6 - y^6$

3. 次の式の展開式を求めよ。

(1) $(x + 1)^6$

(2) $(a - b)^6$

(3) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^5$

4. 式 $(3x - 2)^5$ の展開式における、 x^3 の項の係数を求めよ。

5. n は自然数とする。等式

$${}_nC_0 + 2{}_nC_1 + 2^2{}_nC_2 + \cdots + 2^n{}_nC_n = 3^n$$

が成り立つことを証明せよ。

6. 次の多項式 A 、 B について、 A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = 4x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ 、 $B = 2x + 1$

(2) $A = 2x^3 - 3x - 10$ 、 $B = 2x^2 + 4x + 5$

7. 次の多項式 $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$ 、 $B = x - 3$ について、 A を B で割った商 Q と余り R を求めよ。また、その結果を $A = BQ + R$ の形に表せ。

8. 次の条件を満たす多項式 A 、 B を求めよ。

(1) A を $x^2 - 2x - 1$ で割ると、商が $2x - 3$ 、余りが $-2x$

(2) $6x^4 + 7x^3 - 9x^2 - x + 3$ を B で割ると、商が $2x^2 + x - 3$ 、余りが $6x$

9. 次の分数式を約分して簡単にせよ。

(1) $\frac{12a^2b^4c}{16a^3bc^4}$

(2) $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$

(3) $\frac{a^2 - (b+c)^2}{(a+b)^2 - c^2}$

10. 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{ax^2}{14a^3b^2} \times \frac{21a^2b}{3x}$

(2) $\frac{x^2 - x - 20}{x^3 - 2x^2 + x} \times \frac{x^2 - x}{x - 5}$

(3) $\frac{a^2 + a - 6}{a^2 - a} \times \frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 2a}$

(4) $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

(5) $\frac{x+8}{x^2+x-2} + \frac{x-4}{x^2-x}$

$$(6) \frac{x+1}{1-1/(x+2)} + \frac{x+3}{1+1/(x+2)} \text{ ただし、 } 1/(x+2) = \frac{1}{x+2} \text{ である}^{7)}。$$

11. 次の等式のうち、恒等式はどれか答えよ。

$$(1) (a+3)(a-2) = a^2 + a - 5$$

$$(2) (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(3) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}$$

$$(4) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2+3x+2}$$

12. 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a 、 b 、 c の値を定めよ。

$$(1) ax^2 + bx = (x-2)(x+2) + c(x+2)^2$$

$$(2) x^2 = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$$

$$(3) \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} = \frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$$

$$(4) \frac{4}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

13. 等式 $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ を証明せよ。

14. $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) a^2 + ab + b^2 = -(ab + bc + ca)$$

$$(2) a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$$

15. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、等式 $\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ が成り立つことを証明せよ。

16. $x > 3$ 、 $y > 4$ のとき、不等式 $xy + 12 > 4x + 3y$ が成り立つことを証明せよ。

17. 次の不等式を証明せよ。また、(2)、(3)、(4) は等号が成り立つ場合を調べよ。

7) さらに、 $1 - 1/(x+2) = 1 - \frac{1}{x+2}$ であることに注意せよ。 a/b は $a \div b$ と同じ意味で用いられている。

(1) $a^2 + 11 > 6a$

(2) $4a^2 \geq 3b(4a - 3b)$

(3) $a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$

(4) $2(x^2 + 3y^2) \geq 5xy$

18. $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、 $\sqrt{9a + 16b} < 3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}$ を証明せよ。

19. $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a + \frac{9}{a} \geq 6$

(2) $(a + 2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 8$

20. A(5)、B(-1) の 2 点間の距離を求めよ。

21. 2 点 A(-1)、B(7) を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

(1) 5 : 3 に内分する点

(2) 中点

(3) 5 : 3 に外分する点

(4) 3 : 5 に外分する点

22. 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) (0, 0)、(3, 4)

(2) (-1, 3)、(4, 15)

23. 3 点 A(5, 2)、B(4, 0)、C(0, 2) を頂点とする $\triangle ABC$ は、直角三角形であることを示せ。

24. 2点 $A(-1, 4)$ 、 $B(5, -2)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

(1) $2:1$ に内分、外分する点

(2) 中点

25. $(0, 1)$ 、 $(1, -3)$ 、 $(2, -1)$ の3点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

26. 点 $A(-1, 6)$ に関して、点 $P(3, 4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。