古谷数学教室第 14 回

微分法と積分法 1

2025 年 7 月 16 日

1　基礎事項

1.1　微分係数

関数 $y = f(x)$ において、x の値が a から b まで変化するとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を $x = a$ から $x = b$ までの、$f(x)$ の**平均変化率**という。

例えば、$2 + h$ の h を、0 の両側から 0 に限りなく近づけてみる：

$$2.1,\ 2.01,\ 2.001,\ \cdots$$

または

$$1.9,\ 1.99,\ 1.999,\ \cdots.$$

このことを、h が 0 に限りなく近づくとき、$2 + h$ の**極限値**は 2 であるといい、次のように書く：

$$\lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

関数 $f(x)$ の、$x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a}$$

において、h が 0 に限りなく近づくとき、この平均変化率が一定の値に限りなく近づくならば、その極限値を関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**といい、$f'(a)$ で表す：

微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$、$\mathrm{P}(a+h,\ f(a+h))$ をとると、直線 AP の傾き

$$\frac{f(a+h)}{h}$$

は関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率に等しい。h が 0 に限りなく近づくとき、点 P は点 A に限りなく近づくから、直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 l に限りなく近づく。この直線 l を、関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 A における**接線**といい、A を**接点**という。また、直線 l はこの曲線に点 A で**接する**という。

以上をまとめると、次のことがいえる：

接線の傾きと微分係数

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは、関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

1.2　導関数とその計算

一般に、関数 $f(x)$ において、x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると、x の関数が得られる。このようにして得られる新しい関数 $f(x)$ の**導関数**といい、$f'(x)$ で表す。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、次の式で求められる：

導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

関数 $y = f(x)$ の導関数を、y' や $\dfrac{dy}{dx}$ などで表すこともある。

たとえば、x の関数 $y = x^3$ を、「関数 x^3」のように、単に x の式だけで表記することもある。このときは、関数 x^3 の導関数を $(x^3)'$ で表す。

一般に、次の公式が成り立つ：

関数 x^n と定数関数の導関数

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(c)' = 0,$$

ただし、n は正の整数である。

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを、$f(x)$ を x で微分する、または単に微分するという。

k を定数とする。一般に、次の性質が成り立つ：

関数の定数倍および和、差の導関数

$$y = kf(x)\text{を微分すると}y' = kf'(x),$$
$$y = f(x) \pm g(x)\text{を微分すると}y' = f'(x) \pm g'(x).$$

1.3　接線の方程式

一般に、次のことがいえる：

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

1.4　関数の増減と極大・極小

一般に、関数 $f(x)$ の増減と導関数 $f'(x)$ の符号の関係は、次のようになる：

$f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

$f(x)$ は、$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では増加し、$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では減少する。

一般に、関数 $f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき、$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい、$f(a)$ を**極大値**という。

また、$x = b$ で**極小**であるといい、$f(b)$ を**極小値**という。

極大値と極小値をまとめて**極値**という。関数が常に増加または常に減少する範囲では、増減が入れかわることはないから、関数は極値をもたない。

x の整式で表される関数 $f(x)$ について、次のことがいえる：

$$\text{関数 } f(x) \text{ が } x = a \text{ で極値をとるならば、} f'(a) = 0 \text{である。}$$

ただし、逆成り立たない。

2　例題

1. 定義にしたがって、次の関数 $f(x)$ を微分せよ。

(1) $f(x) = x^2$

(2) $f(x) = x^3$

2. 次の関数 $f(x)$ のグラフを描け。

(1) $f(x) = x^3$

(2) $f(x) = x^3 - 3x$

3 演習問題

1. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2-3x)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{h^2-2h}{h}$

2. 定義にしたがって、関数 $f(x)=4x^2$ の $x=2$ おける微分係数を求めよ。

3. 曲線 $y=x^2+3x$ 上の点 $(0,\ 0)$ における曲線の接線の傾きを求めよ。

4. 次の関数を微分せよ。

(1) $y=-2$

(2) $y=-3x^2+6x-5$

(3) $y=2x^3-5x+3$

(4) $y=(3x-1)(x^2+1)$

(5) $y=2x^4-6x^3+3x-1$

(6) $y=(x^2-1)(x^2+1)$

5. $f(x)=3x^2+2x+1$ について、次の値を求めよ。

(1) $f'(0)$

(2) $f'(-1)$

6. 半径 r の円の面積 S を r の関数と考え、r で微分せよ。

7. 次の曲線上の点における、曲線の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 2 \ \ (1,\ 0)$

(2) $y = 2x^3 + 5x^2 \ \ (-1,\ 3)$

8. 次の関数の増減を調べよ。

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

(2) $y = x^3 + x$

9. 次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = -x^3 + 3x$

(2) $y = \dfrac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x$

10. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = x^3 - 12x \ \ (-3 \leq x \leq 3)$

(2) $y = x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 2x \quad \left(-\dfrac{1}{2} < x < 3\right)$

11. 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $x^3 + 6x^2 - 6 = 0$

(2) $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$