

古谷数学教室第 15 回

微分法と積分法 2

2025 年 7 月 30 日

1 基礎事項

1.1 不定積分

x で微分すると $f(x)$ になる関数を、 $f(x)$ の**原始関数**という。すなわち、 $F'(x) = f(x)$ のとき、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。

たとえば、 $2x$ の原始関数は、 x^2 、 x^2+10 、 x^2-2 など、いくつもあるが、それらの違いは x を含まない定数部分だけである。

一般に、関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数 $F(x)$ がわかれば、 $f(x)$ の任意の原始関数は、 $F(x) + \text{定数}$ の形に表される。この定数を**積分定数**という。

以下、このプリントでは、積分定数を C で表し、 $f(x)$ の任意の原始関数を $F(x) + C$ で表すことにする。この表示を、 $f(x)$ の**不定積分**といい、次のように表す¹⁾：

不定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を**積分する**という。

n は 0 または正の整数であるとする。一般に、次の公式が成り立つ：

x^n の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

関数の定数倍および和、差の不定積分について、次のことがいえる：

1) 不定積分と原始関数を区別せずに同じ意味で用いることもある。

関数の定数倍および和、差の不定積分

$F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = g(x)$ とし、 k は定数とする。

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C,$$
$$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

変数が x でない関数についても、 x の場合と同様に不定積分を考える。たとえば、次の具合である：

$$\int udu = \frac{1}{2}u^2 + C.$$

1.2 定積分

一般に、関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし、 a 、 b を $f(x)$ の定義域内の任意の値とするとき、 $F(a) - F(b)$ の値は $F(x)$ の選び方とは関係なく、 a 、 b の値だけで定まる。例えば、関数 $f(x) = 2x$ の任意の原始関数 $F(x)$ は、

$$F(x) = x^2 + C$$

であるが、 $F(3) - F(1)$ を計算すると、

$$F(3) - F(1) = 8$$

が得られ、定数 C の値を含まない。この $F(a) - F(b)$ を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き、これを関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**という。このとき、 a を**下端** (かたん)、 b を**上端** (じょうたん) という。 a と b の大小関係は問わない。また、 $F(b) - F(a)$ を、

$$\left[F(x) \right]_a^b$$

とも書く。

以上をまとめると、次のようになる：

定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

k は定数とする。不定積分のときと同様に、次のことがいえる：

関数の定数倍および和、差の定積分

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx,$$
$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

定積分の上端、下端に関する性質として、次のことが成り立つ：

定積分の性質

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

関数 $f(t)$ に対して、 $F'(t) = f(t)$ とする。 t を変数とする関数の定積分は、次のようになる：

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

すなわち、次の等式が成り立つ：

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

したがって、変数を表す文字が違うだけの定積分の値は等しくなる。 $f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

は x の関数である。右辺の関数を x で微分すると、次の式を得る²⁾：

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

1.3 定積分と図形の面積

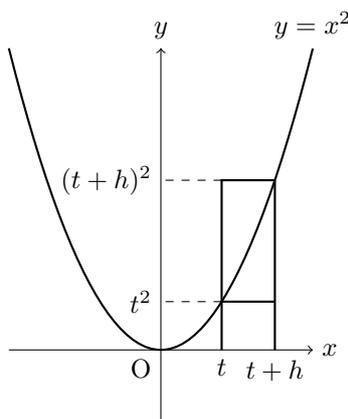
関数 $y = x^2$ のグラフと x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ を考える。 h を 0 でない数とする。4点 $(t, 0)$ 、 (t, t^2) 、 $(t+h, 0)$ 、 $(t+h, t^2)$ の四角形の面積と、4点 $(t, 0)$ 、

2) $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ を意味し、 $F(x)$ の導関数を表す。

$(t, (t+h)^2)$ 、 $(t+h, (t+h)^2)$ 、 $(t+h, 0)$ の四角形の面積と、関数 $y = x^2$ と $x = t$ と $x = t+h$ と x 軸で囲まれた図形の面積の大小関係は、

$$ht^2 < S(t+h) - S(t) < h(t+h)^2$$

となる。



これより、 $h > 0$ のときは、

$$t^2 < \frac{S(t+h) - S(t)}{h} < (t+h)^2$$

となり、 h を限りなく 0 に近づけると、 $(t+h)^2$ は限りなく t^2 に近づくので、

$$t^2 < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} < t^2$$

となる。 $h < 0$ でも同様である。よって、

$$S'(t) = t^2$$

となる。

一般に、関数 $y = f(x)$ について、次のことが成り立つ：

定積分と図形の面積 (1)

$a \leq x \leq b$ の範囲で、 $f(x) \geq 0$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$ 、 $x = b$ で囲まれた図形の面積 S は、

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

次のことも成り立つ；

定積分と図形の面積 (2)

$a \leq x \leq b$ の範囲で、 $f(x) \leq 0$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$ 、 $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{-f(x)\}dx.$$

以上のことをふまえると、次のことも成り立つことがわかる：

定積分と図形の面積 (3)

$a \leq x \leq b$ の範囲で、 $f(x) \leq g(x)$ のとき、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$ 、 $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx.$$

2 例題

1. 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ：

$$y = x^2 - 4.$$

2. 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ：

$$y = x^2 - 1, y = x + 1.$$

3 演習問題

1. 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (2x - 5)dx$$

$$(2) \int (4x^3 - 3x^2 + 1)dx$$

$$(3) \int (t - 1)(t + 2)dx$$

$$(4) \int (x + 1)^3 dx$$

2. 曲線 $y = f(x)$ が、点 $(1, 3)$ を通り、曲線上の各点 (x, y) における接線の傾きは $6x^2 + 2x + 3$ であるとき、曲線 $y = f(x)$ を求めよ。

3. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 (3x^2 + 2x - 1)dx$$

$$(2) \int_2^4 (x - 1)(x - 2)dx$$

$$(3) \int_0^3 (t^2 - 3t + 5)dt$$

$$(4) \int_2^5 (5y^2 + 2y - 1)dy$$

$$(5) \int_3^0 (x^2 - 4x)dx$$

$$(6) \int_1^5 (x^2 + 4x)dx + \int_5^1 (x^2 + 4x)dx$$

$$(7) \int_0^2 (x^2 + 1)dx \int_2^3 (x^2 + 1)dx$$

$$(8) \int_{-1}^2 (x^2 - x)dx - \int_0^2 (x^2 - x)dx + \int_{-1}^0 (2x - 1)dx$$

4. 次の x の関数を微分せよ：

$$\int_1^x (3t^2 - 4t + 1)dt.$$

5. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ 、および定数 a の値を求めよ。

$$(1) \int_a^x f(t)dt = x^2 + 2x - 3$$

$$(2) \int_1^x f(t)dt = 2x^2 + x + a$$

6. 次の曲線と 2 直線、および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$$(1) y = -x^2 + 2x - 2, x = 0, x = 2$$

$$(2) y = x^3 + x, x = 1, x = 3$$

7. 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

8. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$$(1) y = x^2 - 3x + 5, y = 2x - 1$$

$$(2) y = x^2 - 3x - 2, y = -x^2 + x - 2$$

9. 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

10. 次の定積分を求めよ：

$$\int_0^5 |x - 2|dx.$$