

古谷数学教室第 19 回

統計的な推測 1

2025 年 9 月 3 日

1 基礎事項

1.1 確率変数と確率分布

試行の結果によってその値が定まり、各値に対応して確率が定まるような変数を**確率変数**という。

一般に、確率変数 X のとりうる値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であり、それぞれの値をとる確率が $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるとき、次のことが成り立つ：

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0, \\ \sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

確率変数 X のとりうる値とその値をとる確率との対応関係は、表 1 のように書き表される。この

表 1 確率変数 X の確率分布表

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

対応関係を、 X の**確率分布**または**分布**といい、確率変数 X はこの分布に**従う**という。

確率変数 X が値 a をとる確率を $P(X = a)$ で表す。 X が a 以上 b 以下の値をとる確率を $P(a \leq X \leq b)$ で表す。

1.2 確率変数の期待値と分散

確率変数 X の確率分布が表 1 で与えられているとする。このとき、

$$\sum_{k=1}^n x_k p_k$$

を、 X の**期待値**または**平均**といい、 $E(X)$ または m で表す¹⁾。

1) $E(X)$ の E は、期待値を意味する英語 expectation の頭文字、 m は平均を意味する mean の頭文字である。

確率変数 X の確率分布が表 1 で与えられているとする。 a, b を定数とすると、 X に対して $aX + b$ も確率変数であり、その分布は表 2 のようになる。よって、 $aX + b$ の期待値は、明らかに

表 2 確率変数 $aX + b$ の確率分布表

$aX + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\cdots$	$ax_n + b$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

次のようになる：

$aX + b$ の期待値

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

確率変数 X に対して、 X^2 もまた確率変数である（表 3 を参考）。このとき、確率変数 X^2 の期待

表 3 確率変数 X^2 の確率分布表

X	x_1^2	x_2^2	$\cdots$	x_n^2	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

値は、次の式で与えられる：

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k.$$

確率変数 X の確率分布が表 1 で与えられているとする。 X の期待値を m とするとき、確率変数 $(X - m)^2$ の期待値

$$\sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k$$

を、 X の分散といい、 $V(X)$ で表す²⁾。明らかに次のことが成り立つ：

分散と期待値

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2.$$

確率変数 X について、 X の分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を、 X の標準偏差といい、 $\sigma(X)$ で表す³⁾。

確率変数 X の期待値、分散、標準偏差をそれぞれ X の分布の平均、分散、標準偏差ともいう。

標準偏差 $\sigma(X)$ は、 X の分布の平均 m を中心として、 X のとる値の散らばる傾向の程度を表している。標準偏差 $\sigma(X)$ の値が小さければ小さいほど、 X のとる値は、平均 m の近くに集中する傾向にある。

2) $V(X)$ の V は、分散を意味する英語 variance の頭文字である。

3) $\sigma(X)$ の σ は、標準偏差を意味する英語 standard deviation の頭文字 s に相当するギリシャ文字である。

1.3 確率変数の和と積

2つの確率変数 X, Y について、一般に、次のことが成り立つ：

確率変数の和の期待値

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \quad (1)$$

3つ以上の確率変数の和の期待値についても、2つの場合と同様なことが成り立つ。

2つの確率変数 X, Y と定数 a, b について、 $aX + bY$ も確率変数であり、次のことが成り立つ：

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

2つの確率変数 X, Y を考える。 X のとる値 a と Y のとる値 b に対して、

$$P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$$

が a, b のとり方に関係なく常に成り立つとき、確率変数 X, Y は互いに**独立**であるという。とくに、2つの試行 S と T が独立のとき、 S の結果によって定まる確率変数 X と T の結果によって定まる確率変数 Y は独立である。

一般に、確率変数 X, Y について、次のことが成り立つ：

独立な2つの確率変数の積の期待値

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY) = E(X)E(Y). \quad (2)$$

また、次のことも成り立つ：

独立な2つの確率変数

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y). \quad (3)$$

3つ以上の確率変数の独立についても、2つの場合と同様に定義する。

2 例題

1. 白玉 2 個と黒玉 3 個入った袋から、3 個の玉を同時に取り出すとき、出る白玉の個数を X とする。 X の確率分布を求めよ。
2. 確率分布が表 1 で与えられる確率変数 X と任意の実数 a, b について、確率変数 $aX + b$ の確率分布を求めよ。また、 $E(aX + b) = aE(X) + b$ を示せ。
3. 確率分布が表 1 で与えられる確率変数 X について、確率変数 X^2 の確率分布を求めよ。
4. $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を示せ。

3 演習問題

1. 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数を X とする。

(1) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

(2) $P(2 \leq X \leq 3)$ を求めよ。

2. 下の確率分布に従う変数 X について、次の値を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	1

(1) 期待値

(2) 分散

(3) 標準偏差

3. 1 個のさいころを 3 回投げるとき、3 の倍数の目が出た回数 X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

4. 1 個のさいころを投げて出た目を X とするとき、確率変数 $3X - 1$ の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

5. 確率変数 X の期待値を m 、標準偏差を σ とするとき、確率変数 $\frac{X - m}{\sigma}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

6. 2 枚の硬貨を同時に投げる試行を 2 回行う。1 回目の試行で表の出る枚数を X 、2 回目の試行で表の出る枚数を Y とするとき、 X と Y の同時分布を求めよ。

7. 次の事象 A 、 B は独立であるか、従属であるか答えよ。

(1) ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプ S 、 T から 1 枚抜き出すとき、

A : S から 1 枚抜き出しハートが出る, B : T から 1 枚抜き出しエースが出る.

(2) 1 から 9 までの 9 個の整数から 1 個の整数を選ぶとき、

A : 奇数を選ぶ, B : 5 以下を選ぶ.

8. 硬貨とさいころを同時に投げるとき、硬貨で表が出たら 1、裏が出たら 0 となる確率変数を X とし、さいころの出た目の数を Y とする。このとき、確率変数 XY の期待値を求めよ。

4 おまけ

式 (1) を示す。確率変数 X, Y の確率分布は、自然数 n, m を用いて、それぞれ表 1、表 4 で与えられるとする。

表 4 確率変数 Y の確率分布

Y	y_1	$\cdots$	y_m	計
P	q_1	$\cdots$	q_m	1

$1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$ を満たすすべての自然数 k, l を用いて、 $P(X = x_k, Y = y_l) = r_{k,l}$ とする⁴⁾。このとき、確率変数 $X + Y$ の確率分布は、次の表で与えられる：

表 5 確率変数 $X + Y$ の確率分布

$X + Y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$\cdots$	$x_1 + y_m$	$x_2 + y_1$	$\cdots$	$x_2 + y_m$	$\cdots$	$x_n + y_m$	計
P	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\cdots$	$r_{1,m}$	$r_{2,1}$	$\cdots$	$r_{2,m}$	$\cdots$	$r_{n,m}$	1

以上から、

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (x_k + y_l) r_{k,l} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (x_k r_{k,l} + y_l r_{k,l}) \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k p_k + \sum_{l=1}^m y_l q_l \\
 &= E(X) + E(Y) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

ただし、次の式を用いた：

$$\sum_{l=1}^m r_{k,l} = p_k, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n r_{k,l} = q_l. \quad (5)$$

3 つ以上の確率変数の和の期待値についても同様である。

2 の確率変数 X, Y と定数 a, b について、 $aX + bY$ も確率変数であり、次のことが成り立つ：

期待値の公式

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y). \quad (6)$$

4) $X = a$ かつ $Y = b$ である確率を $P(X = a, Y = b)$ で表す。

式 (6) を示す。

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= E(aX) + E(bY) \quad (\because \text{式 (1)}) \\ &= aE(X) + bE(Y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ただし、次の式を用いた：

$$E(aX) = aE(X).$$

式 (2) を示す。

確率変数 X, Y の確率分布は、自然数 n, m を用いて、それぞれ表 1、表 4 で与えられるとする。
このとき、確率変数 XY の確率分布は表 6 で与えられる：よって、

表 6 確率変数 XY の確率分布										
XY	x_1y_1	x_1y_2	$\cdots$	x_1y_m	x_2y_1	$\cdots$	x_2y_m	$\cdots$	x_ny_m	計
P	p_1q_1	p_1q_2	$\cdots$	p_1q_m	p_2q_1	$\cdots$	p_2q_m	$\cdots$	p_nq_m	1

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m x_k y_l p_k q_l \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \sum_{l=1}^m y_l q_l \\ &= E(X)E(Y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

式 (3) を示す。

確率変数 X, Y の確率分布は、自然数 n, m を用いて、それぞれ表 1、表 4 で与えられるとする。
このとき、確率変数 $X+Y$ の確率分布は表 5 で与えられる。ただし、 $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$ を満たすすべての自然数 k, l について、

$$r_{k,l} = p_k q_l$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (x_k + y_l - E(X+Y))^2 \cdot p_k q_l \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m ((x_k - E(X)) + (y_l - E(Y)))^2 \cdot p_k q_l \quad \because \text{式 (1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left((x_k - E(X))^2 + (y_l - E(Y))^2 + 2(x_k - E(X))(y_l - E(Y)) \right) \cdot p_k q_l \\ &= V(X) + V(Y) + 2 \sum_{k=1}^n (x_k - E(X)) p_k \sum_{l=1}^m (y_l - E(Y)) q_l \\ &= V(X) + V(Y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$