古谷数学教室第 23 回

式と曲線 1

2025 年 10 月 22 日

1　基礎事項

1.1　放物線

2 次関数のグラフが放物線になることはすでに学んだ。ここでは、放物線を図形的な性質から定義して、その方程式を求める。

平面上で、定点 F からの距離と、F を通らない定直線 l からの距離が等しい点の軌跡を**放物線**といい、この点 F を放物線の**焦点**、直線 l を放物線の**準線**という。

$p \neq 0$ に対し、点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点とし、直線 $x = -p$ を準線とする放物線の方程式を求める。この放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし、P から l に下ろした垂線を PH とすると、$\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$ すなわち $\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$ を満たす。よって、方程式

$$y^2 = 4px \tag{1}$$

を得る。逆に、(1) 式を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$ を満たす。

(1) 式を放物線の方程式の**標準形**という。また、放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を、放物線の**軸**といい、軸と放物線の交点を、放物線の**頂点**という。放物線は、その軸に関して対称である。

放物線の標準形

焦点は点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$、準線は直線 $x = -p$、軸は x 軸、頂点は原点 O、曲線は x 軸に関して対称。

1.2　楕円

平面上で、2 定点 F、F′ からの距離の和が一定である点の軌跡を**楕円**といい、この 2 点 F、F′ を楕円の**焦点**という。

$a > c > 0$ に対し、2 点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$、$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求める。この楕円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ より、

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ となり、両辺 2 乗して整理すると $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$ を得る。再び両辺 2 乗して整理すると $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ を得る。$b=\sqrt{a^2-c^2}$ とおくと、$a>b>0$ であり、$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ すなわち

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

を得る。逆に、(2) 式を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ を満たす。(2) 式を楕円の方程式の**標準形**という。

(2) 式と x 軸および y 軸の交点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$、$\mathrm{A}'(-a,\ 0)$、$\mathrm{B}(0,\ b)$、$\mathrm{B}'(0,\ -b)$ を楕円 (2) の**頂点**という。頂点を結ぶ線分 AA′、BB′ のうち、長い方を**長軸**、短い方の BB′ を**短軸**という。焦点は、長軸上にある。また、長軸と短軸の交点 O を、楕円の**中心**という。

楕円 (2) は、長軸、短軸に関して対称であり、中心に関しても対称である。

楕円の標準形

焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$、$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$、楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$、長軸の長さは $2a$、短軸の長さは $2b$、曲線は x 軸、y 軸、原点 O に関して対称。

一般に、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、円 $x^2+y^2=a^2$ を、x 軸をもとにして、y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である。

1.3 双曲線

平面上で、2 定点 F、F′ からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡を**双曲線**といい、この 2 点 F、F′ を双曲線の**焦点**という。

$c>a>0$ に対し、2 点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$、$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式を求める。この双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、P が双曲線上にあるのは $\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'=\pm 2a$ のときであるから、楕円のときと同様の計算により、

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

を得る。ただし、$b=\sqrt{c^2-a^2}$ とした。逆に、(3) を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'=\pm 2a$ を満たす。(3) 式を双曲線の**標準形**という。

双曲線 (3) は、次の 2 直線が漸近線である：

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x.$$

双曲線の焦点 F、F′ を通る直線と双曲線の交点を、双曲線の**頂点**という。また、線分 FF′ の中点を、双曲線の**中心**という。

双曲線 (3) について、頂点は 2 点 $(a,\ 0)$、$(-a,\ 0)$ で、中心は原点 O である。また、この双曲線は、x 軸、y 軸、原点 O に関して対称である。

双曲線の標準形

焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$、$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$、双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$、漸近線は 2 直線 $y=\dfrac{b}{a}x$、$y=-\dfrac{b}{a}x$、曲線は x 軸、y 軸、原点 O に関して対称。

一般に、双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は 2 直線 $y=x$、$y=-x$ であり、これらは直角に交わる。このように、直角に交わる漸近線をもつ双曲線を**直角双曲線**という。

1.4　2 曲線の平行移動

x、y の方程式 $F(x,\ y)=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が曲線を表すとき、この曲線を方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線、または曲線 $F(x,\ y)=0$ という。また、方程式 $F(x,\ y)=0$ を、この曲線の方程式という。

次のことがいえる：

曲線の平行移動

曲線 $F(x,\ y)=0$ を、x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動すると、移動後の曲線の方程式は $F(x-p,\ y-q)=0$ となる。

2　例題

1. 円 $x^2+y^2=4^2$ を、x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍して得られる曲線の方程式が $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ となることを示せ。

2. 座標平面上において、長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 2 : 3 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

3. 2 直線 $y=x$、$y=-x$ が双曲線 $x^2-y^2=1$ の漸近線であることを示せ。

3　演習問題

1. 次の放物線の焦点と準線を求めよ。また、その放物線の概形をかけ。

(1) $y^2 = -6x$

(2) $y = 3x^2$

2. 次のような放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が点 $(6,\ 0)$、準線が直線 $x = -6$

(2) 頂点が原点で、焦点が y 軸上にあり、点 $(3,\ -3)$ を通る

3. 次の楕円の長軸の長さ、短軸の長さ、および焦点を求めよ。また、その楕円の概形をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(2) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

(3) $16x^2 + 25y^2 = 400$

4. 中心が原点、長軸が x 軸上にあり、次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1) 長軸の長さが 6、短軸の長さが 4

(2) 2 点 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$、$\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$ を通る

(3) 2 点 $(\sqrt{7},\ 0)$、$(-\sqrt{7},\ 0)$ を焦点とし、短軸の長さが 6

5. 円 $x^2 + y^2 = 25$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{4}{5}$ 倍した曲線の方程式を求めよ。

6. 次の双曲線の頂点、焦点、および漸近線を求めよ。また、概形をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=-1$

(3) $9x^2-16y^2=144$

7. 次のような双曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が $(0,\ 3)$、$(0,\ -3)$ で、点 $(4,\ 5)$ を通る

(2) 漸近線が 2 直線 $y=2x$、$y=-2x$ で、点 $(3,\ 0)$ を通る

(3) 頂点が $(0,\ 4)$、$(0,\ -4)$ である直角双曲線[1)]

8. 曲線 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を、x 軸方向に 2、y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ。また、その焦点を求めよ。

9. 次の方程式はどのような図形を表すか答えよ。また、その概形をかけ。さらに、放物線なら頂点と焦点、楕円なら中心と焦点、双曲線なら焦点と漸近線を求めよ。

(1) $y^2+4y-4x+12=0$

(2) $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$

1） 2 つの漸近線が垂直に交わる双曲線を意味する。