古谷数学教室第 26 回

整数の性質 2

2025 年 11 月 19 日

1　基礎事項

1.1　ユークリッドの互除法

素因数分解をせずに、比較的簡単[1]に最大公約数を求める方法として、次の定理を用いる方法がある：

定理

自然数 a、b について、a を b で割ったときの余りを r とすると、a と b の最大公約数は、b と r の最大公約数に等しい。

この定理を用いて、最大公約数を求める方法を、**ユークリッドの互除法**または単に**互除法**という。

例えば、506 と 437 の最大公約数を考える。$506 = 437 \cdot 1 + 69$ かつ $437 = 69 \cdot 6 + 23$ から、506 と 437 の最大公約数と 437 と 69 の最大公約数が等しい。さらに、437 と 69 の最大公約数と 69 と 23 の最大公約数は等しい。以上から、23 が、506 と 437 の最大公約数であることがわかる。

互除法の計算を利用すると、2 つの整数 a、b の最大公約数を、a と b の式で表すことができる。特に、a と b が互いに素であるとき、$ap+bq = 1$ を満たす整数 p、q が存在する。両辺に整数 c を掛けると、$a(cp) + b(cq) = c$ であるから、次のことがいえる：

定理

2 つの整数 a、b が互いに素であるとき、整数 c について、$ax + by = c$ を満たす整数 x、y が存在する。

1）　ここでは、「比較的簡単」とは何かを答えない。

例えば、等式 $24x+17y=1$ を満たす整数 x、y の組を 1 つ求める。

$$
\begin{aligned}
24 &= 17 \cdot 1 + 7, \\
17 &= 7 \cdot 2 + 3, \\
7 &= 3 \cdot 2 + 1
\end{aligned}
$$

から、

$$
\begin{aligned}
1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\
&= 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 \\
&= 7 \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\
&= (24 - 17 \cdot 1) \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\
&= 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7)
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$$

となり、等式 $24x+17y=1$ を満たす整数 x、y の組の 1 つは $x=5$、$y=-7$ である。

1.2　1 次不定方程式

a、b、c は整数の定数で、$a \neq 0$、$b \neq 0$ とする。x、y の 1 次方程式

$$ax + by = c \tag{1}$$

を成り立たせる整数 x、y の組を、この方程式の**整数解**という。この方程式の整数解を求めることを**1 次不定方程式を解く**という。

一般に、次のことがいえる：2 つの整数 a、b が互いに素であるとき、方程式 $ax+by=0$ のすべての整数解は、次のように表される：

$$x = bk, \quad y = -ak \quad (k \text{ は整数}).$$

式 (1) のすべての整数解を求めるには、式 (1) を満たす整数解を 1 つ見つけて、上のことを利用すればよい。

1.3　n 進法

千の位が 6、百の位が 7、十の位が 8、一の位が 9 である 4 桁の数は 6789 と書く。この表記の意味は

$$6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \tag{2}$$

である。この 6789 は、位取りの基礎を 10 とする表記法で、この表記法を **10 進法**という。

10 進法では、位として 10^0 の位、10^1 の位、10^2 の位、$\cdots$ を用い、各位の数字を右から左へと順に並べている。各位の数字は、0 から 9 までの整数のいずれかで、10 で割った余りの種類と同じである。

同様の考え方で、位取りの基礎を 2 とする表記法を考えることができる。これを **2 進法**という。2 進法では、位として 2^0 の位、2^1 の位、2^2 の位、$\cdots$ を用いる。各位の数字は 0 または 1 である。

例えば、2 進法で表された数 10011 は、10 進法では

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

を表す。2 進法で表された数 10011 を、10 進法の数と区別するため、$10011_{(2)}$ と書くことがある。

各位の数字を上の位から並べて数を表す方法を、**位取り記数法**という。このとき、10 進法の場合の 10、2 進法の場合の 2 のように、位取りの基礎となる数を**底**という。一般に、底を n として数を表す方法を n **進法**といい、n 進法で表された数を n **進数**という。ただし、n は 2 以上の自然数である。n 進数は、右下に $_{(n)}$ をつけて表すことにするが 10 進法ではふつう $_{(10)}$ を省略する。

2　例題

1. 731 と 301 の最大公約数を求めよ。

2. (1) 等式 $24x + 17y = 1$ を満たす整数 $x,\ y$ の組を 1 つ求めよ。

(2) 等式 $24x + 17y = 3$ を満たす整数 $x,\ y$ の組を 1 つ求めよ。

3. 次の方程式の整数解をすべて求めよ：

$$3x + 4y = 1.$$

4. 次の方程式の整数解をすべて求めよ：

$$34x + 29y = 3.$$

5. 次の問いに答えよ。

(1) $20212_{(3)}$ を 5 進法で表せ。

(2) $0.011_{(2)}$ を 10 進法で表せ。

3　演習問題

1. 次の 2 つの整数の最大公約数を求めよ。

(1) 72、15

(2) 308、105

(3) 2717、1309

2. 次の等式を満たす整数 x、y の組を 1 つ求めよ。

(1) $36x + 25y = 1$

(2) $9x - 13y = 7$

(3) $14x + 16y = 6$

3. 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $7x + 8y = 1$

(2) $3x - 5y = 4$

4. $3142_{(5)}$ を 10 進法で表せ。

5. $248_{(10)}$ を、3 進法で表せ。