

古谷数学教室第 27 回

整数の性質（演習）

2025 年 11 月 26 日

以下では、特に断らない限り、文字はすべて整数を表すものとする。ただし、解答者が文字を宣言する場合、その文字がどの集合の要素なのかははっきり書くこと¹⁾。

1. 次の文を読み、後の問いに答えよ。

任意の a, b の最大公約数を $G(a, b)$ で表し、最小公倍数を $L(a, b)$ で表すと約束する。また、任意の a, b の任意の公約数を c_D 、任意の公倍数を c_M とする。さらに、 $0 < n \leq m$ を満たす m, n について、 m を n で割ったときの商を q 、余りを r とする。

次の 3 つの定理を示す：

$$L(a, b) \text{ は } c_M \text{ の倍数である} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$c_D \text{ は } G(a, b) \text{ の約数である} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$G(m, n) = G(n, r) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

式 $\textcircled{3}$ を示すことができれば、ユークリッドの互除法より、

$$mx + ny = G(m, n)$$

を満たす x, y が存在することが分かる。

(1) 約数と倍数の定義を述べよ²⁾。

(2) $L(a, b) = a$ のとき、 a は b の約数か倍数か答えよ。

(3) c_M を用いて、 $L(a, b)$ の定義を述べよ³⁾。

1) 演習講義は採点はしないが（要求があれば採点をする）、減点対象となるという意味だと思えばよい。なお、すでに問題文中で宣言された文字はいちいち断る必要はない。

2) ここでは、高校数学に準ずるもの以外は間違いとみなす。

3) 同じく、高校数学に準ずるもの以外は間違いとみなす。

(4) 式①を示せ。

(5) 式②を示せ。

(6) 式③を示せ。

2. $20!$ の末尾の0の数を答えよ。

3. 方程式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

を満たすすべての正の a, b, c の組 (a, b, c) を求めよ。