古谷数学教室第 29 回

総合演習 2（Theme 2: 定義は何か？, Theme 3: 条件付き確率と確率の乗法定理）

2025 年 12 月 10 日

（次ページに問題があります。）

Theme 2: 定義は何か？

第 2 問

〔1〕(1) (i)　$a,\ b$ を実数とする。2 次不等式

$$x^2 + ax + b > 0 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

の解がすべての実数となるための必要十分条件を，次の二つの方針で考えよう。

方針 1

2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ の最小値に着目する。

$y = x^2 + ax + b$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} a^{\boxed{\text{エ}}} + b$ である。 よって，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} a^{\boxed{\text{エ}}} + b \ \boxed{\text{オ}}\ 0$ である。

方針 2

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ に解の公式を適用したときの根号の中に着目する。

$x^2 + ax + b = 0$ に解の公式を適用すると，

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{キ}}\,b}}{2}$$

となる。よって，① の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$a^{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{キ}}\,b \ \boxed{\text{ク}}\ 0$$

である。

$\boxed{\text{オ}}$ ，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $<$	① $=$	② $>$	③ $\leqq$	④ $\geqq$

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

(ii)　c を実数とする。2 次不等式 $-x^2 + cx - 4 < 0$ の解がすべての実数となるための必要十分条件は

$$\boxed{\text{ケコ}} < c < \boxed{\text{サ}}$$

である。

(2) (i)　$x = 1$ は 2 次不等式 $2024x^2 + 2023x - 2022 > 0$ を $\boxed{\text{シ}}$ 。

また，$x = \dfrac{1}{2}$ はこの 2 次不等式を $\boxed{\text{ス}}$ 。

$\boxed{\text{シ}}$ ， $\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 満たす	① 満たさない

(ii)　$x = -2,\ -\dfrac{3}{2},\ -1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$ のうち，2 次不等式 $2024x^2 + 2023x - 2022 > 0$ を満たすものは $\boxed{\text{セ}}$ 個ある。

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

〔2〕　高校1年生の太郎さんと花子さんのクラスでは，文化祭でやきそば屋を出店することになった。二人は1皿あたりの価格をいくらにするかを検討するためにアンケート調査を行い，1皿あたりの価格と売り上げ数の関係について次の表のように予測した。

1皿あたりの価格（円）	100	150	200	250	300
売り上げ数（皿）	1250	750	450	250	50

この結果から太郎さんと花子さんは，1皿あたりの価格が100円以上300円以下の範囲で，予測される利益（以下，利益）の最大値について考えることにした。

太郎：価格を横軸，売り上げを縦軸にとって散布図をかいてみたよ。

花子：散布図の点の並びは，1次関数のグラフのようには見えないね。2次関数のグラフみたいに見えるよ。

太郎：価格が100，200，300のときの点を通る2次関数のグラフをかくと，図1のように価格が150，250のときの点もそのグラフの近くにあるよ。

花子：現実には，もっと複雑な関係なのだろうけど，1次関数と2次関数で比べると，2次関数で考えた方がよいような気がするね。

(数学Ⅰ，数学A 第2問は次ページに続く。)

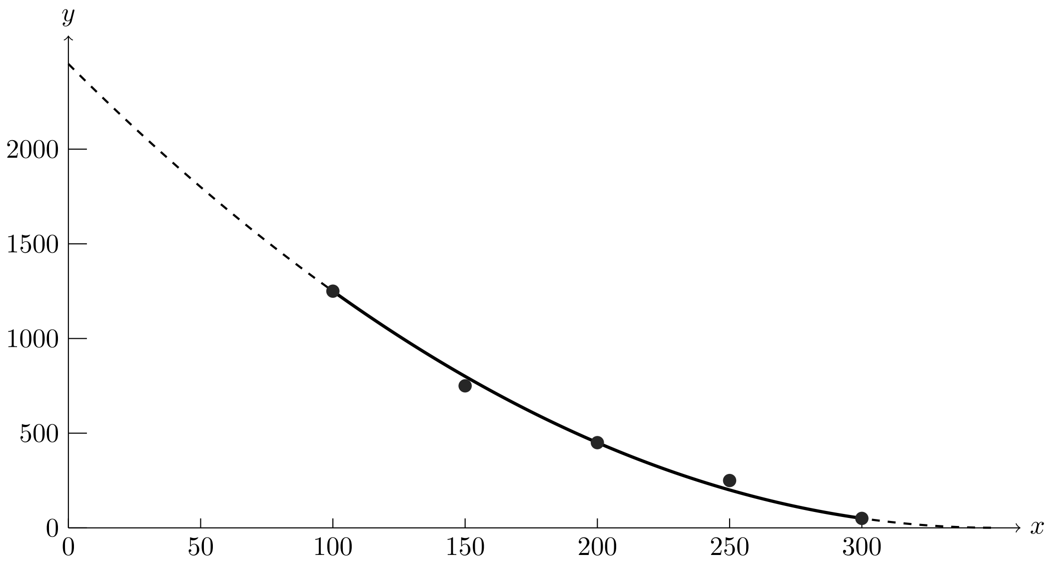

図 1

2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフは，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るとする。このとき，$b =$ **ソタチ** である。

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

二人は，1 皿あたりの価格 x と売上数 y の関係が① を満たしたときの，$100 \leqq x \leqq 300$ での利益の最大値 M について考えることにした。

1 皿あたりの材料費は 80 円であり，材料費以外にかかる費用は 5000 円である。よって，$x-80$ と売り上げ数の積から，5000 を引いたものが利益となる。

このとき，売上数を① の右辺の 2 次式とすると，利益は x の $\boxed{\text{ツ}}$ 次式となる。一方で，売り上げ数として① の右辺の代わりに x の $\boxed{\text{テ}}$ 次式を使えば，利益は x の 2 次式となる。

太郎：利益が $\boxed{\text{ツ}}$ 次式だと，今の私たちの知識では最大値 M を正確に求めることができないね。

花子：① の右辺の代わりに $\boxed{\text{テ}}$ 次式を使えば利益は 2 次式になるから，最大値を求められるよ。

太郎：現実の問題を考えるときには正確な答えが出せないことも多いから，自分の知識の範囲内で工夫しておおよその値を出すことには価値があると思うよ。

花子：考えているのが利益だから，① の右辺の代わりの式は売り上げ数を少なく見積もった式を考えると手堅いね。

太郎：少なく見積もるということは，その関数のグラフは① のグラフより，下の方にあるということだね。

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

1 次関数

$$y = -4x + 1160 \qquad \cdots\cdots ②$$

を考える。このとき，① と② のグラフの位置関係は次の図 2 のようになっている。

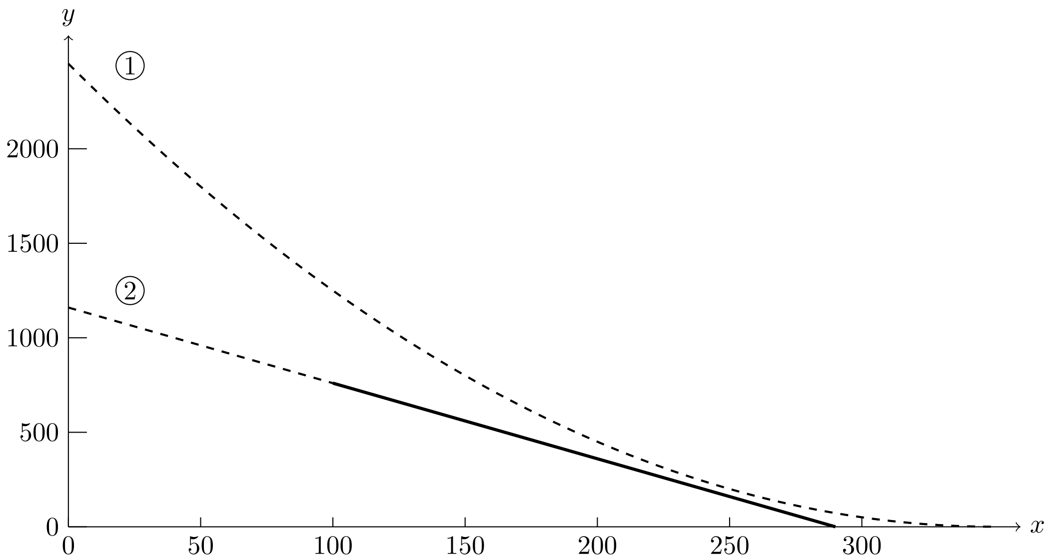

図 2

① の代わりに② の右辺を使うと，売り上げ数を少なく見積もることになる。売り上げ数を② の右辺としたときの利益 z は

$$z = -\boxed{\text{ト}}\,x^2 + \boxed{\text{ナニヌネ}}\,x - 97800$$

で与えられる。z が最大となる x を p とおくと，$p = \boxed{\text{ノハヒ}}$ であり，z の最大値は 39100 である。

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

太郎：売り上げ数を少なく見積もった式は，各 x について値が① より小さければよいので，色々な式が考えられるね。

花子：それらの式を① の右辺の代わりに使ったときの利益の最大値と，① の右辺から計算される利益の最大値 M との関係はどうなるのかな。

1 次関数

$$y = -8x + 1968 \qquad \cdots\cdots ③$$

を考える。売り上げ数を③ の右辺としたときの利益は $x = 163$ のときに最大値となり，最大値は 50112 となる。

また，① ～③ のグラフの位置関係は次の図 3 のようになっている。

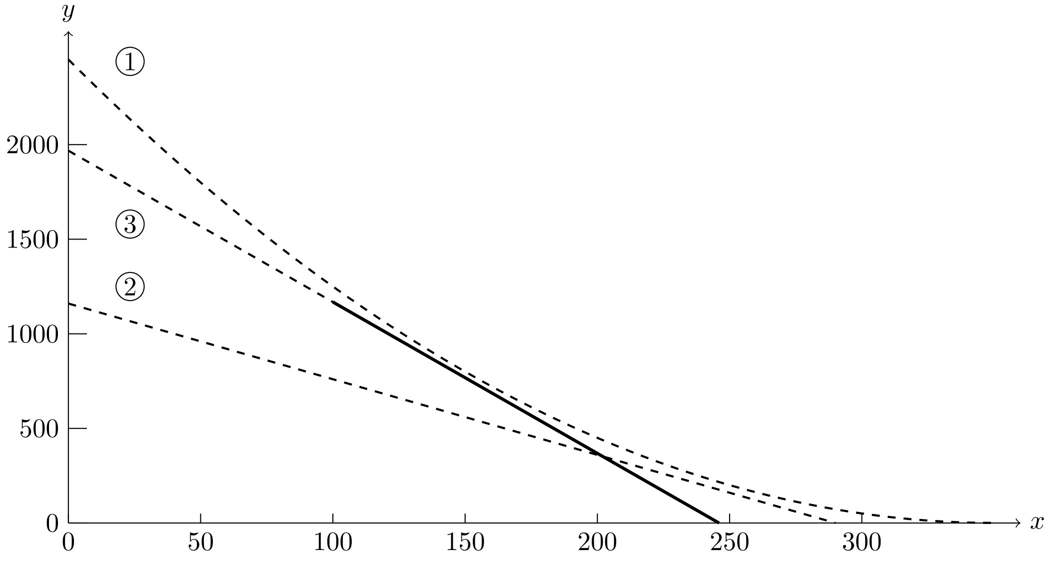

図 3

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

売り上げ数を① の右辺としたときの利益の記述として，　次の⓪～⑥のうち，正しいものは $\boxed{\text{フ}}$ と $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

$\boxed{\text{フ}}$，$\boxed{\text{ヘ}}$ の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪ 利益の最大値 M は 39100 である。
① 利益の最大値 M は 50112 である。
② 利益の最大値 M は $\dfrac{39100+50112}{2}$ である。
③ $x=163$ とすれば，利益は少なくとも 50112 以上となる。
④ $x=p$ とすれば，利益は少なくとも 39100 以上となる。
⑤ $x=163$ のときに利益は最大値 M をとる。
⑥ $x=p$ のときに利益は最大値 M をとる。

（数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。）

1 次関数

$$y = -6x + 1860 \qquad \cdots\cdots ④$$

を考える。$100 \leqq x \leqq 300$ において，売り上げ数を④ の右辺としたときの利益は $x = 195$ のときに最大値となり，最大値は 74350 となる。

また，① ～④ のグラフの位置関係は次の図 4 のようになっている。

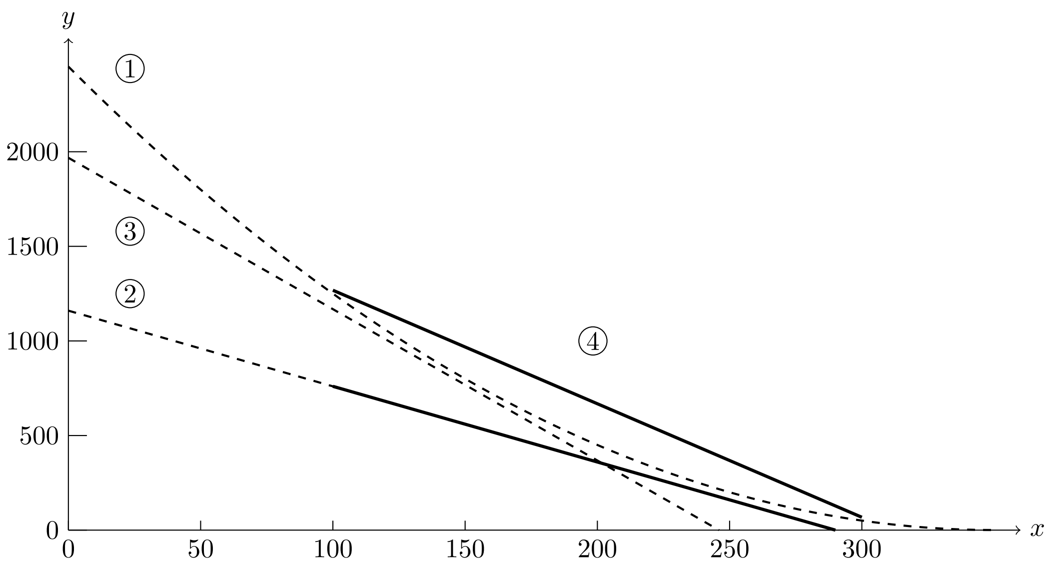

図 4

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

売り上げ数を① の右辺としたときの利益の最大値 M についての記述として，次の⓪〜④のうち，正しいものは $\boxed{ホ}$ である。

$\boxed{ホ}$ の解答群

⓪ 利益の最大値 M は 50112 より小さい。
① 利益の最大値 M は 50112 である。
② 利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい。
③ 利益の最大値 M は 74350 である。
④ 利益の最大値 M は 74350 より大きい。

共通テスト追・再試験より引用。改変。

Theme 3:条件付き確率と確率の乗法定理

第 4 問

箱の中に 1 から 3 までの数字が書かれた札がそれぞれ 3 枚ずつあり，全部で 9 枚入っている。A さん，B さん，C さんの 3 人がこの箱から札を無作為に取り出し，取り出した札は元には戻さない。

(1) A さん，B さん，C さんがこの順に札を取り出すことを考える。

A さんが 2 枚，B さんが 2 枚，C さんが 2 枚札を取り出したとき，A さんのもつ札の数字が同じである確率を p_1 とする。また，A さんが 2 枚，B さんが 2 枚，C さんが 3 枚札を取り出したとき，A さんのもつ札の数字が同じである確率を p_2 とする。 このとき，

p_1 $\boxed{\text{ア}}$ p_2 である。

(2) A さんが 2 枚，B さんが 2 枚，C さんが 3 枚札を取り出すことを考える。

A さん，B さん，C さんがこの順に札を取り出したとき，A さんのもつ札の数字が同じである確率は p_2 である。ここで，B さん，A さん，C さんがこの順に札を取り出したとき，A さんのもつ札の数字が同じである確率を p_3，C さん，A さん，B さんがこの順に札を取り出したとき，A さんのもつ札の数字が同じである確率を p_4 とするとき，

p_2 $\boxed{\text{イ}}$ p_3 であり，p_2 $\boxed{\text{ウ}}$ p_4 である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $=$	① $\neq$

(数学 I，数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

(3)　C さんだけが 3 枚札を取り出したとき，C さんがもつ札の数字がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(4)　C さんが 3 枚，A さん 2 枚の札を，この順に取り出すことを考える。このとき，C さんのもつ札の数字が全て異なり，A さんがもつ札の数字が同じである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(5)　C さんが 3 枚，A さんが 2 枚，B さんが 2 枚の札を，この順に取り出すことを考える。C さんがもつ札の数字がすべて異なり，かつ，A さんがもつ札の数字が同じであるとき，B さんがもつ札の数字が同じである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(**数学 I，数学 A 第 4 問は次ページに続く。**)

(6)　A さんが 2 枚，B さんが 2 枚，C さんが 3 枚を，この順に札を取り出すことを考える。

A さんのもつ札の数字が異なり，B さんがもつ札の数字が異なり，かつ，C さんがもつ札の数字もすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

A さんがもつ札の数字のいずれかが，C さんがもつ札の数字のいずれかと同じである確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である。

岡山大学（理）数学より引用。改変。

解答用紙

第 2 問

解答記号	正解
アイ，ウ，エ	
オ	
カ，キ	
ク	
ケコ，サ	
シ，ス	
セ	
ソタチ	
ツ，テ	
ト，ナニヌネ	
ノハヒ	
フ，ヘ	
ホ	

1 回目の得点は、 $\boxed{}$ であり、2 回目直しで $\boxed{}$ となった。

第 4 問

解答記号	正解
ア	
イ	
ウ	
エ，オカ	
キ，ク	
ケ，コ	
サ，シス	
セソタ，チツテ	

1 回目の得点は、 $\boxed{}$ であり、2 回目直しで $\boxed{}$ となった。

解答

第 2 問

解答記号	正解	配点
アイ，ウ，エ	-1, 4, 2	2
オ	2	2
カ，キ	2, 4	2
ク	0	2
ケコ，サ	-4, 4	2
シ，ス	0, 1	2
セ	4	3
ソタチ	-14	3
ツ，テ	3, 1	1
ト，ナニヌネ	4, 1480	2
ノハヒ	185	3
フ，ヘ	3, 4 (解答の順序は問わない)	4(各 2)
ホ	2	2

第 4 問

解答記号	正解	配点
ア	0	1
イ	0	1
ウ	0	1
エ，オカ	9, 28	3
キ，ク	1, 5	3
ケ，コ	1, 3	3
サ，シス	3, 14	4
セソタ，チツテ	117, 140	4

復習問題

〔1〕 令和 5 年度、数学 I・A の本試験の第 2 問を解け。

〔2〕 当たりくじ 10 本、はずれくじ 90 本のくじが入った箱がある。10 人が順にくじを 1 本引き、引いたくじは元に戻さないものとする。このとき、7 番目の人が当たりくじを引く確率を求めよ。