古谷数学教室第 30 回

総合演習 3（Theme 4:日本語と数学, Theme 5:対称性）

2025 年 12 月 17 日

（次ページに問題があります。）

Theme 4:日本語と数学，Theme 5:対称性

第 2 問

〔1〕(1)　花子さんと太郎さんが，次の**問題 A** について考えている。

> **問題 A**　$\sin\theta = \dfrac{1}{5}$ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めよ。

花子：この問題は，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の関係を用いて，$\cos\theta$ を求めればよいね。

太郎：θ の範囲に注意して，$\cos\theta$ の符号を考えることも忘れずにね。

花子：$\tan\theta$ も同じように求めればよいのね。でも，$\tan^2\theta$ の相互関係の公式が覚えにくくて忘れてしまったよ。

太郎：$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が分かっているから，$\tan\theta$ は簡単に求められるよ。もっと言うと，別に $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の式を用いなくても，図を描くだけで簡単に求まるよ。

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$\cos\theta$ $\boxed{\boxed{\text{ア}}}$ 0 なので，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\cos\theta = \frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。また

$$\tan\theta = \frac{\boxed{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\boxed{\text{カ}}}}$$

より

$$\tan\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}$$

となる。

(**数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。**)

(2)　次の**問題 B** について考える。

問題 B　$\tan\theta = -4\ (90^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を求めよ。

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ $\boxed{\text{ク}}$ 0 なので

$$\tan^2\theta + 1 = \left(\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\right)^2$$

より

$$|\cos\theta| = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}},\quad \sin\theta = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}$$

となる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\sin\theta$	① $\cos\theta$	② $\tan\theta$

（数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。）

〔2〕 半径 R の円に内接している四角形 ABCD が，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 1$，$\mathrm{CD} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\mathrm{DA} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ を満たしている。

△ABD について，余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2 = \frac{\boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} - \left(\sqrt{\boxed{\text{チ}}} + \boxed{\text{ツ}}\right)\cos\angle\mathrm{A} \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる。

△BCD について，余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2 = \frac{\boxed{\text{セ}} - \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} - \left(\sqrt{\boxed{\text{チ}}} - \boxed{\text{ツ}}\right)\cos\angle\mathrm{C} \qquad \cdots\cdots ②$$

が得られる。

① 式と② 式より，

$$\mathrm{BD} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

が得られる。また

$$R = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}, \quad \mathrm{AC} = \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

(数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

（空白のページ）

〔3〕 花子さんの通う学校では，生徒会会則の一部を変更することの賛否について生徒全員が投票することになった。投票結果に関心がある花子さんは，身近な人たちに尋ねて下調べをしてみようと思い，各回答が賛成ならば 1，反対ならば 0 と表すことにした。このようにして作成される n 人分のデータを x_1，x_2，$\cdots$，x_n と表す。ただし，賛成と反対以外の回答はないものとする。

例えば 10 人について調べた結果が

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$

であったならば，$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $\cdots$，$x_{10} = 1$ となる。この場合，データの値の総和は 8 であり，平均値は $\dfrac{4}{5}$ である。

(1) データの値の総和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ は $\boxed{\text{ネ}}$ と一致し，平均値 $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ は $\boxed{\text{ノ}}$ と一致する。

$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 賛成の人の数
① 反対の人の数
② 賛成の人の数から反対の人の数を引いた値
③ n 人中における賛成の人の割合
④ n 人中における反対の人の割合
⑤ $\dfrac{\text{反対の人の数}}{\text{反対の人の数}}$ の値

(**数学 I，数学 A 第 2 問は次ページに続く。**)

(2)　花子さんは，0 と 1 だけからなるデータの平均と分散について考えてみることにした。

$m = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ とおくと，平均値は $\dfrac{m}{n}$ である。また，分散を s^2 で表す。s^2 は，0 と 1 の個数に着目すると

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{ \boxed{\text{ハ}}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2 + \boxed{\text{ヒ}}\left(0-\frac{m}{n}\right)^2 \right\} = \boxed{\text{フ}}$$

と表すことができる。

$\boxed{\text{ハ}}$ ，$\boxed{\text{ヒ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ n	① m	② $(n-m)$	③ $\frac{m}{n}$
④ $(1-\frac{m}{n})$	⑤ $\frac{n}{2}$	⑥ $\frac{m}{2}$	⑦ $\frac{n-m}{2}$

$\boxed{\text{フ}}$ の解答群

⓪ $\frac{m^2}{n^2}$	① $(1-\frac{m}{n})^2$	② $\frac{m(n-m)}{n^2}$
③ $\frac{m(1-m)}{n^2}$	④ $\frac{m(n-m)}{2n^2}$	⑤ $\frac{n^2-3mn+3m^2}{n^2}$
⑥ $\frac{n^2-2mn+2m^2}{2n^2}$		

共通テスト追・再試験より引用。改変。

第 3 問

$\triangle$OAB の内心を I とし，$\triangle$OAB の内接円と辺 AB との接点を L とする。また，$\triangle$OAB の内接円と辺 OA，OB との接点を，それぞれ M，N とする。さらに，$\angle\mathrm{AOB} = 2\theta$，$\angle\mathrm{OAB} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{OBA} = 2\beta$ とおく。

(1)　点 I が $\triangle$OAB の内心であることから，4 点 A，I，L，$\boxed{\text{ア}}$ は同一円周上にあることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ B	① M	② N	③ O

(数学 I，数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

(2)　辺 OA と直線 BI の交点を X とする。このとき，辺 OA における 2 点 M，X の位置関係について考えよう。そのために，∠OMI と OXI の大小関係を調べる。まず

$$\angle\mathrm{OMI} = \boxed{\text{イウ}}^\circ$$

である。また，△OBX に着目し，$\theta+\alpha+\beta=90^\circ$ であることに注意して，∠OXI を β を用いずに表すと

$$\angle\mathrm{OXI} = \boxed{\text{イウ}}^\circ + \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$$

となる。

このことから，$\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ のとき点 X は $\boxed{\text{カ}}$ ことがわかり，

$\boxed{\text{エ}} > \boxed{\text{オ}}$ のとき点 X は $\boxed{\text{キ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ θ	① α	② 2θ	③ 2α

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 点 M と一致する
① 点 M と異なり，線分 OM 上にある
② 点 M と異なり，線分 AM 上にある

(**数学 I，数学 A 第 3 問は次ページに続く。**)

(3)　直線 MN と BI の交点を P とする。

- $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。このとき直線 MN 上での 3 点 P，M，N の位置関係に注意すると，$\angle \mathrm{ONP} = \boxed{\text{ク}}$，$\angle \mathrm{OBP} = \boxed{\text{ケ}}$ となるので $\angle \mathrm{MPI} = \boxed{\text{コ}}$ となる。したがって，4 点 I，M，P，$\boxed{\text{サ}}$ は同一円周上にある。

- $\boxed{\text{エ}} > \boxed{\text{オ}}$ とする。このとき $\angle \mathrm{MPI} = \boxed{\text{シ}}$ となる。したがって，4 点 I，M，P，$\boxed{\text{サ}}$ は $\boxed{\text{ス}}$。

$\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ θ	① α	② β
③ $90^\circ - \theta$	④ $90^\circ - \alpha$	⑤ $90^\circ - \beta$
⑥ $180^\circ - \theta$	⑦ $180^\circ - \alpha$	⑧ $180^\circ - \beta$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ A	① B	② N	③ O

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ 同一円周上にある	① 同一円周上にはない

（**数学 I，数学 A 第 3 問は次ページに続く。**）

(4)　直線 MN と BI，AI との交点を，それぞれ P，Q とする。
$\theta = 32°$，$\alpha = 34°$ のとき，4 点 M，N，P，Q は直線 MN 上に $\boxed{セ}$ の順に並ぶ。

$\boxed{セ}$ については，最も適当なものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。

⓪ M，P，N，Q	① M，P，Q，N
② P，M，N，Q	③ P，M，Q，N

共通テスト追・再試験より引用。

（空白のページ）

解答用紙

第 2 問

解答記号	正解
ア	
イ，ウ， エ	
オ， カ	
キ	
ク	
ケ	
コ，サシ	
ス	
セ，ソ，タ，チ，ツ	
テ，ト	
ナ，ニ	
ヌ	

解答記号	正解
ネ，ノ	
テ，ト	
ナ	

1 回目の得点は、 $\boxed{}$ であり、2 回目直しで $\boxed{}$ となった。

第 3 問

解答記号	正解
ア	
イウ，エ，オ	
カ，キ	
ク，ケ	
コ，サ	
シ，ス	
セ	

1 回目の得点は、 $\boxed{}$ であり、2 回目直しで $\boxed{}$ となった。

（空白のページ）

解答

第 2 問

解答記号	正解	配点
ア	2	1
イ，ウ，　エ	2, 6, 5	2
オ，　カ	0, 1	1
キ	1	2
ク	0	1
ケ	1	1
コ，サシ	1, 17	2
ス	4	2
セ，ソ，タ，チ，ツ	4, 3, 2, 3, 1	3
テ，ト	6, 2	3
ナ，ニ	2, 2	3
ヌ	2	3

解答記号	正解	配点
ネ，ノ	0, 3	2
ハ，ヒ	1, 2	2
フ	2	2

第 3 問

解答記号	正解	配点
ア	1	2
イウ，エ，オ	90, 1, 0	3
カ，キ	2, 1	3
ク，ケ	3, 2	3
コ，サ	1, 0	3
シ，ス	7, 0	3
セ	0	3

復習問題

〔1〕　令和 7 年度、数学 I・A の本試験の第 1 問を解け。

〔2〕　次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$　$(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めよ。

(2)　$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$　$(180^\circ < \theta < 270^\circ)$ のとき、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を求めよ。

〔3〕　次の問いに答えよ。

(1)　$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を示せ。

(2)　$\tan(\alpha \pm \beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。ただし、次の式を用いてもよい。

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad (\text{複合同順})$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad (\text{複合同順})$$

(3)　「四角形 ABCD が円に内接する」ならば $\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{C} = 180^\circ$ であることを示せ。

〔4〕　半径 R の円に内接する四角形 ABCD について、AB $= 2$、BC $= 1$、CD $= 3$、DA $= 3$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　BD の大きさを求めよ。

(2)　AC の大きさを求めよ。

(3)　R を求めよ。