

古谷数学教室第 31 回

総合演習 4 (Theme 6:四面体の体積)

2025 年 12 月 24 日

(次ページに問題があります。)

Theme 6:四面体の体積

第 6 問 (選択問題) (配点 16 点)

c を実数とする。座標空間上の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $C\left(1, \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ を考える。

(1) $|\vec{OB}| = \boxed{\text{ア}}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \boxed{\text{イ}}$ であり, $\triangle OAB$ の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) 4 点 O, A, B, C が同一平面上にあるとき, 2 つの実数 α, β を用いて

$$\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$$

と表せる。このとき, $c = \boxed{\text{エ}}$ である。

(数学 II, 数学 B, 数学 C 第 6 問は次ページに続く。)

(3) $c \neq$ とする。平面 OAB 上の点 H があり、直線 CH と平面 OAB が垂直であるとする。

このとき、

$$\vec{CH} \cdot \vec{OA} = \text{オ}, \quad \vec{CH} \cdot \vec{OB} = \text{カ}$$

であるので、

$$H \left(\text{キ}, \frac{\text{ク}}{\sqrt{\text{ケ}}}, \frac{\text{コサ}}{\sqrt{\text{シ}}} \right)$$

となる。

4 点 O, A, B, C が作る四面体の体積が 1 であるとき、

$$c = \pm \sqrt{\text{ス}}$$

である。

(4) $c = \sqrt{\text{ス}}$ であるとき、 $\triangle COA$ は 。また、 $\triangle COB$ は 。

,

 の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① 正三角形である
- ② 正三角形ではない、二等辺三角形である
- ③ 二等辺三角形ではない

(空白のページ)

解答用紙

解答記号	正解
ア	
イ	
ウ	
エ	
オ, カ	
キ, ク, ケ, コサ, シ	
ス	
セ, ソ	

(空白のページ)

解答

解答記号	正解	配点
ア	2	2
イ	2	2
ウ	3	2
エ	0	2
オ, カ	0, 0	1
キ, ク, ケ, コサ, シ	1, 1, 6, -1, 6	3
ス	3	2
セ, ソ	1, 1	2

復習問題

- [1] 座標空間中の4点 $A(0, 0, 2)$, $B(2, -2, 3)$, $C(a, -1, 4)$, $D(1, a, 1)$ が同一平面上にあるとき、実数 a の値を求めよ。