

古谷数学教室第 32 回

総合演習 5 (Theme 7:微分法と積分法)

2026 年 1 月 7 日

(次ページに問題があります。)

Theme 7:微分法と積分法

第3問 (必答問題) (配点 22点)

3次関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 15x + 1$ を考える。

(1) 座標平面上における, $y = f(x)$ 上の点 $(-1, f(-1))$ における接線の方程式は,

$$y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\boxed{\text{ア}}}{h} (x + \boxed{\text{イ}}) + \boxed{\text{ウエ}}$$

である。また,

$$f(x) - (-18x) = (x + \boxed{\text{オ}})^3$$

であるため, $y = f(x)$ と $y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\boxed{\text{ア}}}{h} (x + \boxed{\text{イ}}) + \boxed{\text{ウエ}}$ のグラフの概形は $\boxed{\text{カ}}$ である。

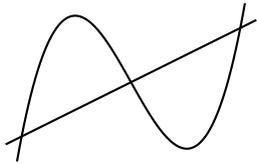
$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ① $f(-1+h) - f(h)$ | ⑥ $f(-1+h) + f(h)$ |
| ② $f(-1+h) - f(-1)$ | ⑦ $f(-1+h) + f(-1)$ |
| ③ $f(-1-h) - f(-h)$ | ⑧ $f(-1-h) + f(-h)$ |

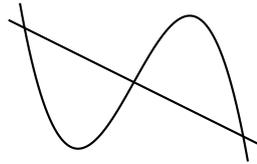
(数学 II, 数学 B, 数学 C 第3問は次ページに続く。)

カ については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。なお、 x 軸、 y 軸は省略しているが、 x 軸に関しては右方向が正の方向であり、 y 軸に関しては上方向が正の方向であるとする。

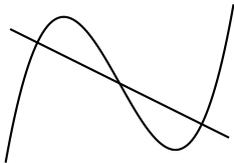
①



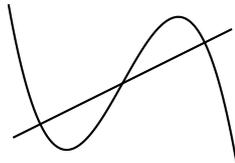
②



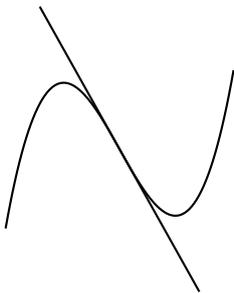
③



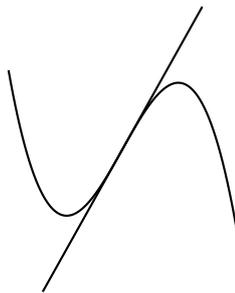
④



⑤



⑥



(数学 II, 数学 B, 数学 C 第 3 問は次ページに続く。)

(2) 太郎さんと花子さんは、 $y = f(x)$ の極大値と極小値をとる点を通る直線について考えている。

太郎： $y = f(x)$ の極小値、極大値をとる点をそれぞれ $(\alpha, f(\alpha))$ 、 $(\beta, f(\beta))$ とすると、 $f(\alpha)$ 、 $f(\beta)$ の計算が大変だね。

花子： $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx$ を利用すれば、 $y = f(x)$ の極小値、極大値をとる点を通る直線の傾きを簡単に求められそうよ。

太郎： $y = f(x)$ の極小値、極大値をとる点を通る直線だから、どちらにせよ $f(\alpha)$ 、 $f(\beta)$ を計算することになりそうだね。

花子： $y = f(x)$ の極大値と極小値をとる点以外に、その直線が通る点を見つければ、 $f(\alpha)$ 、 $f(\beta)$ の計算はしなくても済みそうよ。

3次関数 $y = f(x)$ は $x = \alpha$ のときに極小値、 $x = \beta$ のときに極大値をとるとする。このとき、

$$\alpha = \boxed{\text{キク}} \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}},$$

$$\beta = \boxed{\text{キク}} \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = \boxed{\text{シス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

であり、 $y = f(x)$ を x 軸方向に $+1$ 、 y 軸方向に -18 だけ平行移動した3次関数を $y = g(x)$ とすると、 $-g(x) = g(\boxed{\text{ソ}})$ が成り立つので、2点 $(\alpha, f(\alpha))$ 、 $(\beta, f(\beta))$ を通る直線は、

$$y = \boxed{\text{タチツ}} x + \boxed{\text{テ}}$$

である。

(数学 II, 数学 B, 数学 C 第 3 問は次ページに続く。)

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

<input type="radio"/> ① +	<input type="radio"/> ① -
---------------------------	---------------------------

の解答群

<input type="radio"/> ① $x - 1$	<input type="radio"/> ① $-x - 1$
<input type="radio"/> ② x	<input type="radio"/> ③ $-x$
<input type="radio"/> ④ $x + 1$	<input type="radio"/> ⑤ $-x + 1$

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y =$ $x +$ で囲まれた図形の面積は

である。さらに, $f(\alpha) + f(\beta) =$ である。

(空白のページ)

解答用紙

解答記号	正解
ア, イ, ウエ	
オ	
カ	
キク, ケ, コ, サ	
シスセ	
ソ	
タチツ, テ	
トナ	
ニヌ	

(空白のページ)

解答

解答記号	正解	配点
ア, イ, ウエ	2, 1, 18	2
オ	1	2
カ	4	1
ク, ケ, コ, サ	-1, 0, 6, 1	3
シスセ	24, 6	3
ソ	3	2
タチツ, テ	-12, 6	3
トナ	18	3
ニヌ	36	3

復習問題

[1] 次の式を証明せよ：

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3,$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(x - \beta) dx = -\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4.$$