古谷数学教室第 33 回

総合演習 6（Theme 8:三角関数と図形の関係，Theme 9:特殊解）

2026 年 1 月 14 日

（次ページに問題があります。）

Theme 8:三角関数，図形と方程式

第 1 問 （必答問題） （配点　15 点）

(1)　太郎さんと花子さんが，次の**問題 A** について考えている。

> **問題 A**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，θ の方程式
>
> $$\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 1 \quad \cdots\cdots ①$$
>
> を解け。

> 太郎：　この問題は，三角関数の合成を利用すれば解けそうだよ。
>
> 花子：　$\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ とおいて，図形と方程式の問題として解くこともできそうよ。

合成を利用すると，

$$\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = \boxed{\text{ア}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$$

である。

（数学 II，数学 B，数学 C 第 1 問は次ページに続く。）

$\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ とおく。このとき,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

であり, ① かつ② の解は, $x = \boxed{\text{ウ}}$ のときは $y = \boxed{\text{エ}}$, $x = -\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

のときは $y = -\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

以上から, ① のすべての解は,

$$\theta = \boxed{\text{ク}}, \quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である。

(数学 II,数学 B,数学 C 第 1 問は次ページに続く。)

(2)　k を 0 以上の定数とし，θ の不等式

$$k\cos\theta + \sin\theta \geqq 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

を考える。

(i)　$k = 1$ のとき，③ を満たすすべての解は $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$	① $2\pi \cdot n \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$　（n は整数）
② $\theta \leq 0,\ \ \dfrac{\pi}{4} \leqq \theta$	③ $\theta \leqq 2\pi \cdot n,\ \ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n \leqq \theta$　（n は整数）
④ $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$	⑤ $2\pi \cdot n \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$　（n は整数）
⑥ $\theta \leq 0,\ \ \dfrac{\pi}{2} \leqq \theta$	⑦ $\theta \leqq 2\pi \cdot n,\ \ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n \leqq \theta$　（n は整数）

（数学 II，数学 B，数学 C 第 1 問は次ページに続く。）

(ii)　$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，③ を満たす解がちょうど 1 つとなる k の値の範囲を調べる。

直線 $kx + y - 1 = 0$ は，k の値に関わらず，点 $\left(\boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}} \right)$ を通ることに注意して，③ を満たす解がちょうど 1 つとなる k の値の範囲は $\boxed{\text{セ}}$ 。

(iii)　$\dfrac{3\pi}{2} \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，③ を満たす解が存在するための k の値の範囲は $\boxed{\text{ソ}}$ 。

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ すべての正の実数	① 存在しない
② $k = 0$	③ $k = 1$
④ $0 \leqq k \leqq 1$	⑤ $1 \leqq k$

Theme 9:特殊解

第 4 問 （選択問題） (配点　16 点)

n を自然数とする。太郎さんと花子さんは，数列の漸化式について話している。

太郎：例えば，漸化式 $a_{n+1}-3a_n+2=0$ は初項の値によって a_n が変わるね。

花子：a_n についてのさまざまな漸化式で初項を変えて，そのときの a_n を調べてみると面白そうだね。

(1)　漸化式

$$a_{n+1}-3a_n+2=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

は，初項が $a_1=3$ のとき，$a_n=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}^{n-1}+\boxed{\text{ウ}}$ であり，初項が $a_1=1$ のとき，$a_n=\boxed{\text{エ}}$ である。

（数学 II，数学 B，数学 C 第 4 問は次ページに続く。）

太郎：① の初項が $a_1=1$ ならば，$a_n=$ $\boxed{\text{エ}}$ であり，$a_{n+1}=$ $\boxed{\text{エ}}$ だから，① から $\boxed{\text{エ}}$ $-3\cdot$ $\boxed{\text{エ}}$ $+2=0$ を引くと，$a_{n+1}-$ $\boxed{\text{エ}}$ $-3(a_n-$ $\boxed{\text{エ}}$ $)=0$ が得られて，$b_n=a_n-$ $\boxed{\text{エ}}$ とおくと，b_n を求めるのは簡単だね。

花子：漸化式の解は初項が決まっていないなら無数にあるので，1 つ見つけて元の漸化式から引くと，解きやすくなるのかもしれないね。

(2) 漸化式

$$a_{n+1}+2a_n-3n=0$$

を考える。ただし，$a_1=1$ であるとする。

実数 α，β を用いて，$b_n=\alpha n+\beta$ とおく。すべての n で $b_{n+1}+2b_n-3n=0$ を満たすとき，

$$\alpha=\boxed{\text{オ}}\,,\quad \beta=-\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。よって，$b_1=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，

$$a_n=\frac{\boxed{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{ケ}}}+n-\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

（数学 II，数学 B，数学 C 第 4 問は次ページに続く。）

(3)　漸化式

$$a_{n+1} - 2a_n - 3^n = 0$$

を考える。ただし，$a_1 = 1$ であるとする。 すべての n で，$b_{n+1} - 2b_n - 3^n = 0$ を満たす b_n は，$b_n = \boxed{\text{サ}}$ であるので，

$$a_n = -\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{サ}}$$

である。

(4)　漸化式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

を考える。ただし，$a_1 = 1$，$a_2 = 5$ であるとする。

p，q を，$p < q$ を満たす整数とする。$b_n = a_{n+1} - pa_n$ とおき， すべての n で $b_{n+1} - qb_n = 0$ を満たすとき，

$$p = \boxed{\text{ス}}, \quad q = \boxed{\text{セ}}$$

であるため，

$$b_n = \boxed{\text{ソ}}$$

であり，

$$a_n = -\boxed{\text{タ}} + \boxed{\text{チ}}$$

である。

(5)　$c_n = -\boxed{\text{タ}} + \boxed{\text{チ}}$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = -\boxed{\text{ツ}} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，

$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 2^{n-1}	① 2^n	② 2^{n+1}
③ 3^{n-1}	④ 3^n	⑤ 3^{n+1}
⑥ $(-2)^{n-1}$	⑦ $(-2)^n$	⑧ $(-2)^{n+1}$

解答用紙

第 1 問

解答記号	正解
ア，イ	
ウ，エ	
オ，カ，キ	
ク，ケ，コ	
サ	
シ，ス	
セ	
ソ	

第 4 問

解答記号	正解
ア，イ，ウ	
エ	
オ，カ，キ	
ク，ケ	
コ	
サ	
シ	
ス，セ	
ソ	
タ，チ	
ツ，テ，ト，ナ，ニ	

解答

第 1 問

解答記号	正解	配点
ア，イ	2, 3	2
ウ，エ	1, 0	2
オ，カ，キ	1, 2, 3	2
ク，ケ，コ	0, 4, 3	2
サ	5	2
シ，ス	0, 1	2
セ	2	1
ソ	5	2

第 4 問

解答記号	正解	配点
ア，イ，ウ	2, 3, 1	1
エ	1	2
オ，カ，キ	1, 1, 3	2
ク，ケ	2, 3	1
コ	6	1
サ	4	1
シ	1	1
ス，セ	2, 3	2
ソ	4	1
タ，チ	1, 4	2
ツ，テ，ト，ナ，ニ	2, 5, 2, 1, 2	2

復習問題

〔1〕　k を実数の定数とする。方程式

$$3\sin\theta + \cos\theta = k$$

が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に異なる 2 つの解をもつような k の値の範囲を求めよ。

〔2〕　n を自然数とする。漸化式

$$a_{n+1} - 3a_n + n^2 = 0$$

の一般解 a_n を求めよ。ただし，$a_1 = 1$ とする。