

古谷数学教室第 5 回

三角比、三角関数 1

2025 年 4 月 16 日

1 基礎事項

1.1 三角比

直角三角形の鋭角¹⁾の 1 つを θ とし、斜辺の長さを r 、他の辺の長さを図 1 のように、 x 、 y とする。このとき、

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$$

の各値は、三角形の大きさに関係なく、いずれも角 θ の大きさだけで決まる。これらを、それぞれ θ の**正弦** (sine)、**余弦** (cosine)、**正接** (tangent) といい、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ と書く。正弦、余弦、正接をまとめて**三角比**という。

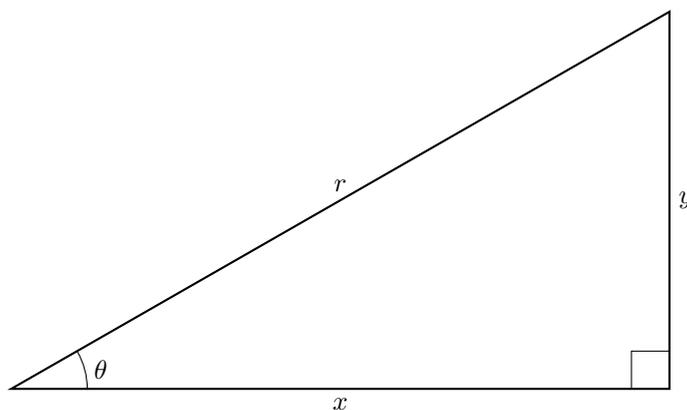


図 1 直角三角形による三角比の定義

1.2 三角比の相互関係

三角比の間に次の関係が成り立つ：

1) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある角 θ を鋭角という。

三角比の相互関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad (1)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad (2)$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}. \quad (3)$$

$(\sin \theta)^2$ 、 $(\cos \theta)^2$ 、 $(\tan \theta)^2$ を、それぞれ $\sin^2 \theta$ 、 $\cos^2 \theta$ 、 $\tan^2 \theta$ と書くことに注意する。

証明 図1より、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

なので、

$$\tan \theta = \frac{x}{y} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \blacksquare$$

図1について、三平方の定理から、

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2(\cos^2 + \sin^2) = r^2$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \quad \blacksquare$$

さらに、 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割ると、

$$\tan^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \blacksquare$$

さらに、鋭角 θ について、次の関係が成り立つ：

$90^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta,$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta,$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}.$$

1.3 三角比の拡張

これまで、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲になる θ についての三角比を扱ってきたが、ここでは、 θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に広げて三角比を定義する。

図2のように、座標平面上において原点 O を中心とする半径 r の半円をかき、この半円と x の正の部分との交点を A とする。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲にある θ に対して、 $\angle AOP = \theta$ となる点 P をこ

の半円上にとり、点 P の座標を (x, y) とする。このとき、 θ の三角比を、次の式で定義する：

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

ただし、 $\theta = 90^\circ$ のときは $\tan \theta$ は定義されない。

θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に広げた場合も、三角比 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値は、 r の大きさに関係なく、いずれも角 θ の大きさだけで決まる。

一般に、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の関係が成り立つ：

180° - θ の三角比

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta, \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta, \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan \theta. \end{aligned}$$

三角比の相互関係式 (1)、(2)、(3) は、 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲にある角 θ についても、そのまま成り立つ。

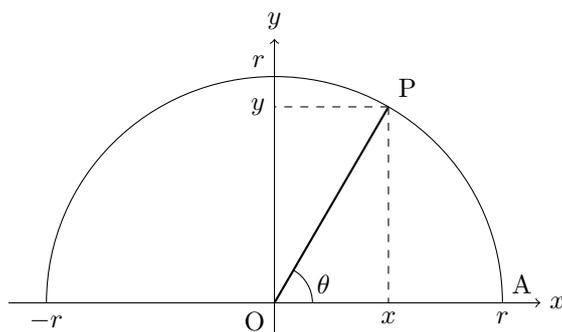


図 2 半円の円周上の点による三角比の定義

1.4 正弦定理

以下では、 $\triangle ABC$ において、頂点 A、B、C に向かい合う辺 BC、CA、AB の長さを、それぞれ a 、 b 、 c で表す。また、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の大きさを、それぞれ A 、 B 、 C で表す。

$\triangle ABC$ の外接円²⁾ の半径を R とすると、次の**正弦定理**が成り立つ³⁾：

2) 三角形の各頂点を通る円を、その三角形の**外接円**という。

3) $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と書くこともある。

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

1.5 余弦定理

$\triangle ABC$ において、次の余弦定理が成り立つ：

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$\triangle ABC$ において、 $\cos A$ の符号は、 $b^2 + c^2 - a^2$ の符号と同じになるので、 $b^2 + c^2$ と a^2 の大小によって、次のことが言える：

$$0^\circ < A < 90^\circ \iff b^2 + c^2 > a^2,$$

$$A = 90^\circ \iff b^2 + c^2 = a^2,$$

$$90^\circ < A < 180^\circ \iff b^2 + c^2 < a^2.$$

1.6 三角形の面積

$\triangle ABC$ の面積 S は、次の式で表される：

三角形の面積

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

また、 $\triangle ABC$ の面積を S 、 $\triangle ABC$ の内接円⁴⁾ の半径を r とするとき、次が成り立つ：

$$S = \frac{r}{2}(a + b + c).$$

4) 1つの円が、三角形の3辺すべてに接しているとき、この円をこの三角形の内接円という。

1.7 角の拡張

平面上で、点 O を中心に半直線 OP を回転させるとき、この半直線 OP を**動径**といい、動径の最初の位置を示す半直線 OX を**始線**という。

回転の向きについて、時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**といい、同じ向きを**負の向き**という。また、始線 OX から、正の向きに測った回転の角を**正の角**といい、負の向きに測った回転の角を**負の角**という。

正の角は、たとえば $+45^\circ$ または 45° と表す。負の角は、たとえば -30° と表す。

また、動径が正の向きに 1 回転すると、 360° 、2 回転すると 720° 、負の向きに 1 回転すると -360° の角を表す。

このように、回転の向きと大きさをもつ角を**一般角**という。

θ を一般角とする。始線 OX から θ だけ回転した位置にある動径 OP を、 θ の動径という。

30° 、 180° などのように、これまで使ってきた度を単位とする角の表し方を 60 分法、または**度数法**という。

これに対して、円における弧の長さに着目した角の測り方がある。円において、半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさを 1 ラジアン、また 1 弧度という。半径 1 の円では、長さ 1 の弧に対する中心角の大きさが 1 ラジアンであり、長さ a の弧に対する中心角の大きさが a ラジアンである。

ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という。

動径の表す角について、弧度法では次のことがいえる：動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると、動径 OP の表す角は $\alpha + 2\pi \cdot n$ である。ただし、 n は整数である。

半径 r 、中心角 θ ラジアンの扇形の弧の長さを l 、面積を S とすると、次のことが成り立つ：

扇形の弧の長さ と 面積

$$l = r\theta,$$
$$S = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

1.8 三角関数

座標平面上で、図 3 のように x 軸の正の部分に始線を取り、一般角 θ の動径と、原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を (x, y) とする。このとき、

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

と定め、それぞれ一般角 θ の正弦、余弦、正接という。

これらはいずれも θ の関数であり、まとめて θ の**三角関数**という。

原点を中心とする半径1の円を**単位円**という。

一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とすると、 $\sin \theta = y$ 、 $\cos \theta = x$ となる。また、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を $T(1, m)$ とすると、 $\tan \theta = m$ である。点 P が単位円の周上を動くとき、点 T は直線 $x = 1$ 上のすべての点を動く。以上から、次のことが成り立つ：

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1,$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1.$$

さらに、 $\tan \theta$ の値の範囲は実数全体である。

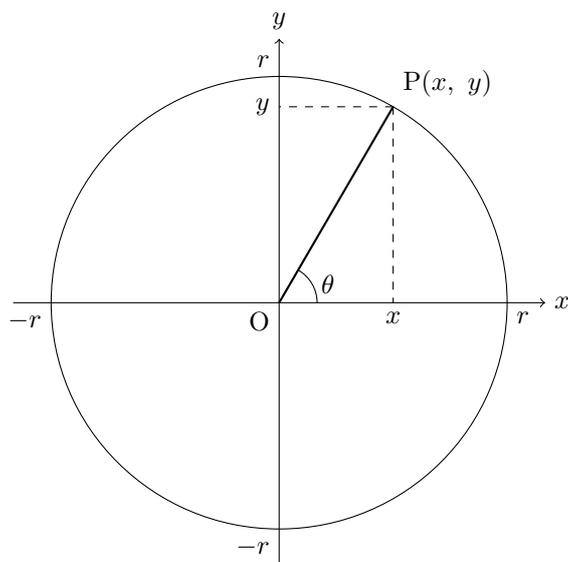


図3 三角関数の定義

2 例題

1. 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100m 登るとき、鉛直方向⁵⁾ には何 m 登ったことになるか。1m 未満を四捨五入して求めよ。
2. $\sin \theta = \frac{2}{3}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。ただし、 θ は鋭角とする。
3. $\tan \theta = 2$ のとき、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。ただし、 θ は鋭角とする。
4. $\triangle ABC$ において、次が成り立つとき、 A を求めよ：

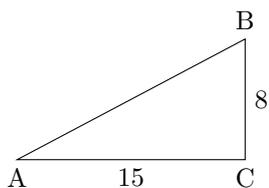
$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3.$$

5) 鉛直方向は水平方向と垂直な方向である。

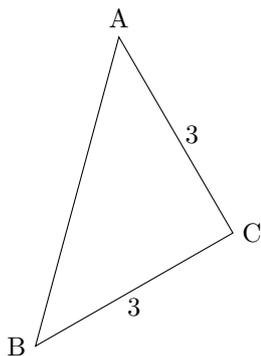
3 演習問題

1. 次の図において、 α 、 β の正弦、余弦、正接の値を求めよ。

(1) $A = \alpha$ 、 $B = \beta$ 、 $C = 90^\circ$



(2) $A = \alpha$ 、 $B = \beta$ 、 $C = 90^\circ$



2. 次の x の値、鋭角 θ のおよその大きさを求めよ⁶⁾。

(1) $x = \sin 35^\circ$

(2) $\sin \theta = 0.24$

(3) $\cos \theta = 0.9$

(4) $\tan \theta = 4.01$

3. $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC = 2$ であるような、 $\triangle ABC$ について、他の 2 辺の長さを求めよ。

6) ここで、「およその大きさ」とは、三角比の表を用いてもっとも近い値を探せという意味である。角度 θ に関しては、 1° 刻みで近い方を選択すること。

4. ある地点から高さ 40m の建物の屋上を見上げたところ、仰角が 25° であった。その地点と建物との距離は約何 m か。1m 未満は四捨五入して求めよ。

5. θ は鋭角であるとする。 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ のうち 1 つが次の値をとるとき、他の 2 つの値を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{4}{5}$

(2) $\tan \theta = 3$

6. $\cos 50^\circ$ を 45° 以下の角の三角比で表せ。

7. 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ$

(2) $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \sin 70^\circ$

8. 次の等式が成り立つことを証明せよ：

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} = 1.$$

9. 式 $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ の値を求めよ。

10. 次の三角比の表を完成させよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$									
$\cos \theta$									
$\tan \theta$									

11. $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。条件 $\sin \theta \cos \theta < 0$ を満たす θ は鋭角、鈍角のどちらか答えよ。

12. 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 156^\circ$

(2) $\cos 93^\circ$

(3) $\tan 117^\circ$

13. $\sin 165^\circ$ 、 $\cos 113^\circ$ 、 $\tan 98^\circ$ の三角比の値を求めよ⁷⁾。

14. $\sin 110^\circ + \cos 160^\circ + \tan 10^\circ + \tan 170^\circ$ の値を求めよ。

15. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan \theta = -1$

(3) $2 \cos \theta = -\sqrt{3}$

16. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ のうち 1 つが次の値をとるとき、他の 2 つの値を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{2}{5}$

(2) $\tan \theta = -3$

17. 直線 $y = -x$ と x 軸の正の向きとなす角 θ を求めよ。

18. x 軸の正の向きとなす角が、次のようになる直線の傾きを求めよ。

(1) 120°

(2) 135°

19. $\triangle ABC$ において、外接円の半径を R とする。次の問いに答えよ。

7) 三角比の表を利用してもよい。

(1) $a = 6$ 、 $A = 45^\circ$ 、 $B = 60^\circ$ のとき、 b の値を求めよ。

(2) $a = 8$ 、 $B = 30^\circ$ 、 $C = 105^\circ$ のとき、 b の値を求めよ。

(3) $A = 135^\circ$ 、 $R = 4$ のとき、 a の値を求めよ。

(4) $a = 6$ 、 $B = 70^\circ$ 、 $C = 80^\circ$ のとき、 R の値を求めよ。

(5) $c = R$ のとき、 C の値を求めよ。

(6) $b = 4$ 、 $c = 2\sqrt{3}$ 、 $A = 30^\circ$ のとき、 a の値を求めよ。

(7) $a = 15$ 、 $b = 7$ 、 $c = 13$ のとき、 C の値を求めよ。

(8) $a = 4$ 、 $b = \sqrt{13}$ 、 $B = 60^\circ$ のとき、 c の値を求めよ。

(9) $b = 2\sqrt{2}$ 、 $c = 4$ 、 $C = 135^\circ$ のとき、 a の値を求めよ。

20. 次の3つの数を辺の長さとする三角形は、鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるか答えよ。

(1) 4、9、11

(2) 9、10、12

(3) 6、8、10

21. 次のような $\triangle ABC$ において、残りの辺の長さ、角の大きさを求めよ。

(1) $a = \sqrt{2}$ 、 $b = 1 + \sqrt{3}$ 、 $C = 45^\circ$

(2) $a = 2\sqrt{3}$ 、 $b = 3\sqrt{2}$ 、 $c = 3 + \sqrt{3}$

22. 川のこちら岸の 30m 離れた地点 B、C から、対岸の地点 A を観測すると、 $\angle ABC = 75^\circ$ 、 $\angle ACB = 45^\circ$ であった。A、B 間の距離を求めよ。

23. 次のような $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1) $b = 7$ 、 $c = 8$ 、 $A = 45^\circ$

(2) $a = 4$ 、 $b = 5$ 、 $c = 6$

(3) $a = 2$ 、 $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 、 $A = 105^\circ$ 、 $B = 30^\circ$

24. $\triangle ABC$ の面積を S とする。次のものを求めよ。

(1) $a = 6$ 、 $C = 30^\circ$ 、 $S = 8$ のとき、 b

(2) $b = \sqrt{3}$ 、 $c = 4$ 、 $S = 3$ のとき、 A

25. 次の角の動径 OP を図示せよ。また、その動径 OP の表す角を、 $\alpha + 360^\circ \times n$ (n は整数) の形で表せ。ただし、 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ とする。

(1) 380°

(2) -400°

26. 次の角を弧度法で表せ。

(1) 30°

(2) 60°

27. 次の角を度数法で表せ。

(1) $\frac{3}{4}\pi$

(2) 2π

28. 次の角の動径は第何象限にあるか調べよ。

(1) $-\frac{5}{6}\pi$

(2) $\frac{13}{3}\pi$

29. 次のような扇形の弧の長さとお面積を求めよ。

(1) 半径が 5、中心角 $\frac{\pi}{3}$

(2) 半径が 4、中心角が $\frac{3}{4}\pi$

30. θ が次の値のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を、それぞれ求めよ。

(1) $\frac{2}{3}\pi$

(2) $-\frac{5}{6}\pi$

31. $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ のうち、1 つが次のように与えられたとき、他の 2 つの値を求めよ。ただし、[] 内は、 θ の動径が含まれる象限を表す。

(1) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ [第 3 象限]

(2) $\tan \theta = -1$ [第 4 象限]

32. 次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

(2) $\frac{1}{\tan^2 \theta} - \cos^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\tan^2 \theta}$

33. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3) $\sin \theta - \cos \theta$

(4) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

34. 次の三角関数の値を、鋭角の三角関数で表し、その値を求めよ。

(1) $\sin \frac{5}{3}\pi$

(2) $\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\frac{23}{6}\pi\right)$

表1 三角比の表

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	31°	0.5150	0.8572	0.6009	61°	0.8746	0.4848	1.8040
1°	0.0175	0.9998	0.0175	32°	0.5299	0.8480	0.6249	62°	0.8829	0.4695	1.8807
2°	0.0349	0.9994	0.0349	33°	0.5446	0.8387	0.6494	63°	0.8910	0.4540	1.9612
3°	0.0523	0.9986	0.0524	34°	0.5592	0.8290	0.6745	64°	0.8988	0.4384	2.0452
4°	0.0698	0.9976	0.0699	35°	0.5736	0.8192	0.7002	65°	0.9063	0.4226	2.1329
5°	0.0872	0.9962	0.0875	36°	0.5878	0.8090	0.7265	66°	0.9135	0.4067	2.2245
6°	0.1045	0.9945	0.1051	37°	0.6018	0.7986	0.7536	67°	0.9205	0.3907	2.3204
7°	0.1219	0.9925	0.1228	38°	0.6157	0.7880	0.7813	68°	0.9272	0.3746	2.4208
8°	0.1392	0.9903	0.1405	39°	0.6293	0.7771	0.8098	69°	0.9336	0.3584	2.5261
9°	0.1564	0.9877	0.1584	40°	0.6428	0.7660	0.8391	70°	0.9397	0.3420	2.6368
10°	0.1736	0.9848	0.1763	41°	0.6561	0.7547	0.8693	71°	0.9455	0.3256	2.7532
11°	0.1908	0.9816	0.1944	42°	0.6691	0.7431	0.9004	72°	0.9511	0.3090	2.8757
12°	0.2079	0.9781	0.2126	43°	0.6820	0.7314	0.9325	73°	0.9563	0.2924	3.0046
13°	0.2249	0.9744	0.2309	44°	0.6947	0.7193	0.9657	74°	0.9613	0.2756	3.1405
14°	0.2419	0.9703	0.2493	45°	0.7071	0.7071	1.0000	75°	0.9659	0.2588	3.2842
15°	0.2588	0.9659	0.2679	46°	0.7193	0.6947	1.0355	76°	0.9703	0.2419	3.4360
16°	0.2756	0.9613	0.2867	47°	0.7314	0.6820	1.0724	77°	0.9744	0.2249	3.5965
17°	0.2924	0.9563	0.3057	48°	0.7431	0.6691	1.1106	78°	0.9781	0.2079	3.7663
18°	0.3090	0.9511	0.3249	49°	0.7547	0.6561	1.1504	79°	0.9816	0.1908	3.9459
19°	0.3256	0.9455	0.3443	50°	0.7660	0.6428	1.1918	80°	0.9848	0.1736	4.1359
20°	0.3420	0.9397	0.3640	51°	0.7771	0.6293	1.2349	81°	0.9877	0.1564	4.3373
21°	0.3584	0.9336	0.3839	52°	0.7880	0.6157	1.2799	82°	0.9903	0.1392	4.5508
22°	0.3746	0.9272	0.4040	53°	0.7986	0.6018	1.3269	83°	0.9925	0.1219	4.7765
23°	0.3907	0.9205	0.4245	54°	0.8090	0.5878	1.3759	84°	0.9945	0.1045	5.0154
24°	0.4067	0.9135	0.4452	55°	0.8192	0.5736	1.4270	85°	0.9962	0.0872	5.2689
25°	0.4226	0.9063	0.4663	56°	0.8290	0.5592	1.4803	86°	0.9976	0.0698	5.5376
26°	0.4384	0.8988	0.4877	57°	0.8387	0.5446	1.5359	87°	0.9986	0.0523	5.8228
27°	0.4540	0.8910	0.5095	58°	0.8480	0.5299	1.5938	88°	0.9994	0.0349	6.1266
28°	0.4695	0.8829	0.5317	59°	0.8572	0.5150	1.6541	89°	0.9998	0.0175	6.4515
29°	0.4848	0.8746	0.5543	60°	0.8660	0.5000	1.7321	90°	1.0000	0.0000	—