

# 古谷数学教室第 6 回

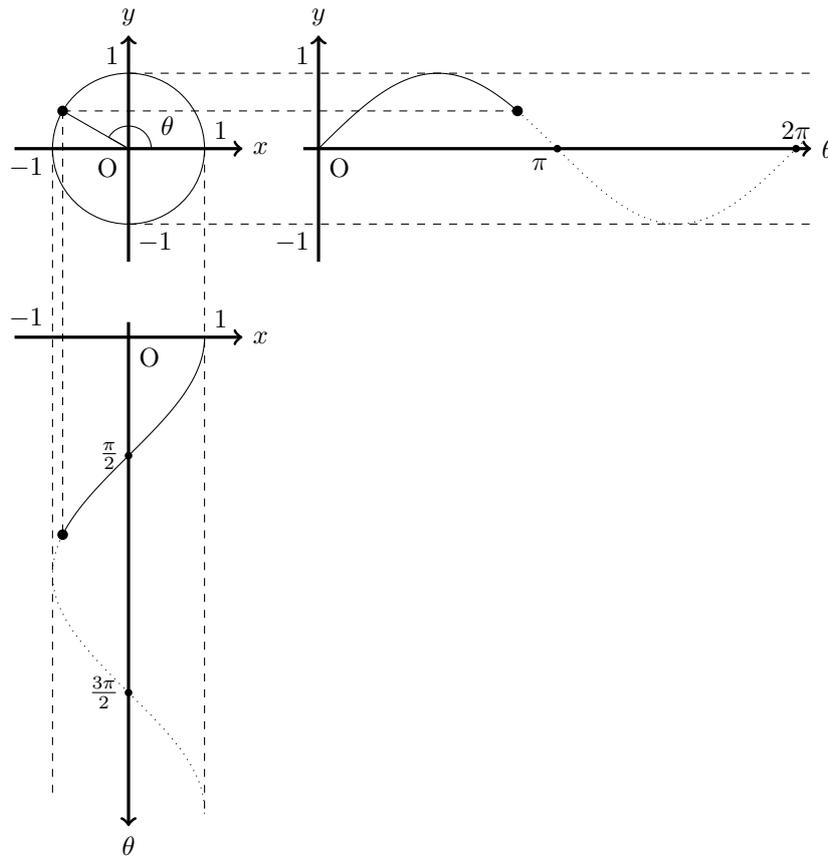
## 三角関数 2

2025 年 4 月 30 日

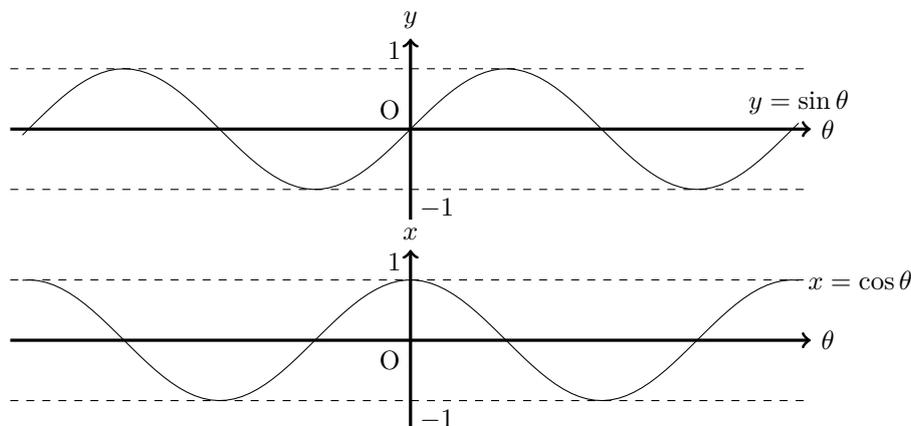
### 1 基礎事項

#### 1.1 三角関数のグラフ

一般角  $\theta$  の動径と単位円の交点を  $P(x, y)$  とすると、 $\sin \theta = y$ 、 $\cos \theta = x$  である。これより、関数  $y = \sin \theta$ 、 $x = \cos \theta$  のグラフをかくと、次のようになる。



$y = \sin \theta$  と  $x = \cos \theta$  を見やすく並べると、以下の図のようになる<sup>1)</sup>。



動径は1回転するともとの位置にもどるから、次が成り立つ：

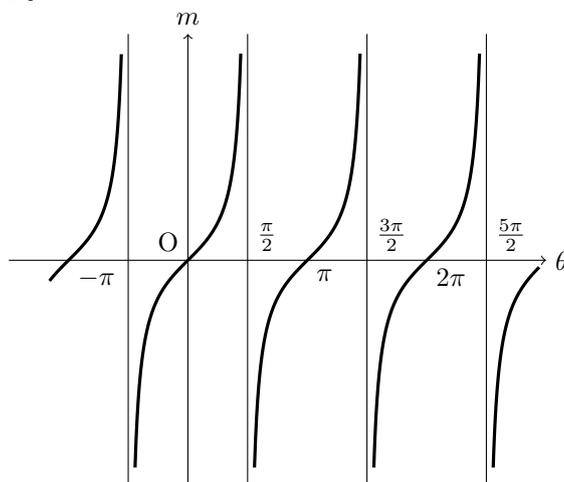
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta.$$

この性質により、関数  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  はいずれも  $2\pi$  の周期をもつ<sup>2)</sup> という。

グラフについていうと、 $y = \sin \theta$ 、 $y = \cos \theta$  のグラフは、いずれも  $2\pi$  ごとに同じ形を繰り返す。さらに、次のことがいえる<sup>3)</sup>：

$$\sin \theta = -\sin(-\theta), \quad \cos \theta = \cos(-\theta).$$

関数  $y = \tan \theta$  のグラフについても調べる。一般角  $\theta$  の動径と単位円の交点を P とし、直線 OP と直線  $x = 1$  の交点を T(1, m) とすると、 $\tan \theta = m$  である。これより、関数  $m = \tan \theta$  のグラフをかくと、次のようになる。



- 1)  $y = \sin \theta$  のグラフの形を**正弦曲線**または**サインカーブ**という。 $y = \cos \theta$  の正弦曲線であることがわかる。
- 2) 一般に、関数  $f(x)$  が 0 でない定数  $p$  に対して、常に  $f(x+p) = f(x)$  を満たすとき、関数  $f(x)$  は  $p$  を周期とする**周期関数**であるという。このとき、 $2p$ 、 $3p$ 、 $-p$  なども周期であるが、周期関数の周期といえば、ふつう正の周期のうち最小のものをさす。
- 3) 日本語にすると、 $y = \sin \theta$  のグラフは原点に関して対称である、 $y = \cos \theta$  のグラフは  $y$  軸に関して対称である、ということを行っている。これは、納得するまで考えること。

$\tan \theta$  は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  では定義されないが、 $y = \tan \theta$  のグラフは  $\theta$  が  $\frac{\pi}{2}$  に限りなく近づくと、直線  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に限りなく近づく。グラフが限りなく近づく直線を、そのグラフの漸近線という。関数  $y = \tan \theta$  には、次のような性質がある：

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta.$$

また、漸近線をもつ。

$k$  を正の定数とする。三角関数の周期について、一般に、次のが成り立つ：

$$\sin(k\theta + 2\pi) = \sin k\theta,$$

$$\cos(k\theta + 2\pi) = \cos k\theta,$$

$$\tan(k\theta + \pi) = \tan k\theta.$$

## 1.2 三角関数の性質

次の等式が成り立つ<sup>4)</sup>：

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta,$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta,$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta,$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta,$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta,$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}.$$

## 1.3 三角関数の加法定理

一般に、正弦、余弦について、次の加法定理が成り立つ：

### 正弦、余弦の加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

4) なぜ成り立つのか、自分で考えよ。

**証明** 座標平面における単位円上の点  $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $Q(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ 、 $R(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ 、 $S(1, 0)$  について、

$$PQ^2 = RS^2$$

より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

が得られ<sup>5)</sup>、これより

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

が得られ<sup>6)</sup>、 $\cos(-\beta) = \cos \beta$ 、 $\sin(-\beta) = -\sin \beta$  より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

が得られる。さらに、 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ 、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$  より

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

が得られ、

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \cos(-\beta)$$

が得られる。以上より、

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \blacksquare$$

正弦、余弦の加法定理から、次の正弦の加法定理が得られる：

#### 正接の加法定理

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

5) おそらく、ほとんどの学生さんがそうだろうと思うのだが、この式をみて、一瞬で納得できない学生さんへコメントをする。参考書や問題集などで、なぜそれが成り立つのか理解できない場合、「この参考書（問題集）は説明不足だ！」や「分かりにくい！」などと早い段階で諦めてしまうのはもったいない。（そもそも、理解もできていない段階で「分かりにくい」と判断することはできない。「分かっていない」の言い間違いである。）式変形が理解できないとき、それは問題を解くヒントのようなものだと思って、自分で正しいことを確認する癖をつけることを強く勧める。

6)  $-\beta \rightarrow \beta$  と読み替えばよい。

証明  $\tan(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha \pm \beta) / \cos(\alpha \pm \beta)$  を利用して、分母分子を  $\cos \alpha \cos \beta$  で割ることにより得られる ■

## 1.4 加法定理の応用

加法定理から明らかに次が成り立つ<sup>7)</sup>：

### 2倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.\end{aligned}$$

また、 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  について、 $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$  と置き換えると、次の式が得られる：

### 半角の公式

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \\ \tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.\end{aligned}$$

$a \sin \theta + b \cos \theta$  を  $r \sin(\theta + \alpha)$  の形に変形することを、三角関数を**合成**するという：

### 三角関数の合成

$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$ 、 $b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha$  とするとき、

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha).$$

$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha$ 、 $b = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$  とおけば、 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha)$  と合成できる。

7) 証明はかならず自分ですること。

## 2 例題

1.  $\theta$  の動径が第 3 象限にあり、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$  の値を、それぞれ求めよ。
2.  $\theta$  の動径が第 4 象限にあり、 $\tan \theta = -2$  のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  の値を、それぞれ求めよ。
3. 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

$$(1) y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) y = 2 \sin \theta$$

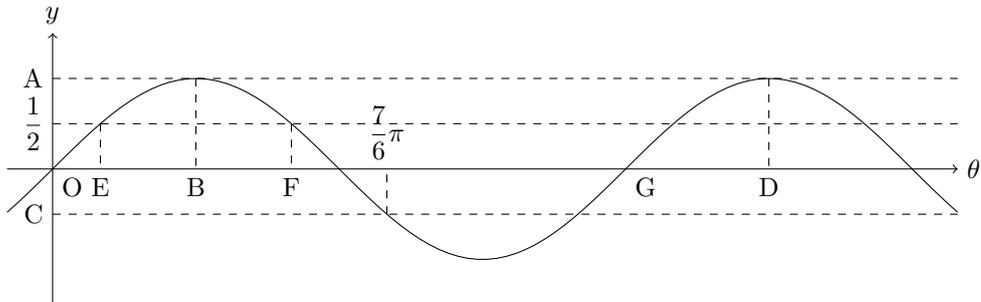
$$(3) y = \sin 2\theta$$

4.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、方程式  $2 \cos \theta - 1 = 0$  を解け。
5.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、方程式  $2 \sin \theta + 1 = 0$  を解け。
6.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、不等式  $\cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  を解け。また、不等式  $\cos \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$  を解け。
7. 加法定理を利用することにより、2 倍角の公式、半角の公式を証明せよ。
8. 次の関数の最大値、最小値を求めよ：

$$y = \sin x + \cos x.$$

### 3 演習問題

1. 下の図は、関数  $y = \sin \theta$  のグラフである。図中の目盛り A から G の値を求めよ。



2. 次の関数の周期を求め、グラフをかけ。また、それぞれ [ ] 内のグラフとどのような位置関係にあるか答えよ。

(1)  $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$  [ $y = \cos \theta$ ]

(2)  $y = \cos \theta - 1$  [ $y = \cos \theta$ ]

(3)  $y = 4 \sin \theta$  [ $y = \sin \theta$ ]

(4)  $y = 2 \sin 2\theta$  [ $y = \sin \theta$ ]

3. 関数  $y = 3 \cos(4\theta - 3\pi)$  のグラフは、 $y = \cos 4\theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\alpha$  だけ平行移動し、 $\theta$  軸をもとにして  $y$  軸方向に  $\beta$  倍に拡大したものである。また、この関数の周期は  $\gamma$  である。このとき、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  を求めよ。

4.  $y = 3 \sin\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 1$  の関数のグラフをかけ。また、その周期を答えよ。

5.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の方程式を解け。また、 $\theta$  の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1)  $\cos \theta = \frac{1}{2}$

(2)  $2 \sin \theta = -1$

(3)  $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$

6.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の不等式を解け。

(1)  $\sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $2 \cos \theta + \sqrt{2} > 0$

(3)  $\tan \theta + \sqrt{3} < 0$

7. 次の値を求めよ。

(1)  $\sin 255^\circ$

(2)  $\tan 195^\circ$

(3)  $\cos \frac{13}{12}\pi$

8.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  とする。次の値を求めよ。

(1)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\cos \beta = -\frac{3}{5}$  のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\tan(\alpha + \beta)$

(2)  $\tan \alpha = 1$ 、 $\tan \beta = -2$  のとき、 $\tan(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$

9.  $y = \frac{3}{2}x$  と  $y = -5x$  のなす角  $\theta$  を求めよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。

10. 次の値を求めよ。

(1)  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 、 $\sin \alpha = \frac{5}{6}$  のとき、 $\cos 2\alpha$ 、 $\sin 2\alpha$ 、 $\tan 2\alpha$

(2)  $\tan \alpha = 4$  のとき、 $\tan 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 、 $\sin 2\alpha$

(3)  $\sin \frac{\pi}{12}$

(4)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  のとき、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\alpha}{2}$

(5)  $\pi < \alpha < \frac{2}{3}\pi$ 、 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$  のとき、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\tan \frac{\pi}{2}$

11. 次の等式を証明せよ。

$$(1) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

$$(2) \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan 2\alpha}$$

12. 次の式を  $r \sin(\theta + \alpha)$  の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$  とする。

$$(1) -2 \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$(2) \sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$$

$$(3) 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$$

13.  $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ。

14.  $0 \leq x < 2\pi$  のとき、次の関数  $y = \sin x - \cos x$  の最大値と最小値、およびそのときの  $x$  の値を求めよ。