

古谷数学教室第 7 回

平面ベクトル 1

2025 年 5 月 7 日

1 基礎事項

1.1 ベクトル

向きをつけた線分を**有向線分**という。有向線分 AB では、 A をその**始点**、 B をその**終点**といい、その**向き**は A から B に向かっているとする。

また、線分 AB の長さを、有向線分 AB の**大きさ**という。

平面上で図形を平行移動する場合、その平行移動を表す有向線分は、いくつも図示できるが、それらは位置が違っただけで、向きと大きさは同じである。

有向線分の位置の違いを無視して、その向きと大きさだけに着目したものを**ベクトル**¹⁾ という。ベクトルは、向きと大きさをもつ量²⁾ である。

有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表す。また、ベクトルを $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ などで表すこともある³⁾。ベクトル $\overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{a}$ の大きさは、それぞれ $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\vec{a}|$ で表す。

向きが同じで大きさも等しい 2 つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ は**等しい**といい、 $\vec{a} = \vec{b}$ と書く。

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを、 $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい、 $-\vec{a}$ で表す。

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき、 $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ である。すなわち、

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

である。

1.2 ベクトルの演算

ベクトルは、向きと大きさをもつ量である。ここでは、ベクトルについて、加法と減法を定義する。さらに、実数倍についても考える。

ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して、 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ となるように点 C をとる。このようにして定

1) ここでは、平面上の有向線分が表すベクトルを考える。

2) たとえば、速度や力などはベクトルである。

3) 大学物理では、 $\vec{a}$ を $\boldsymbol{a}$ で表す。

まるベクトル $\overrightarrow{AC}$ を、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の和といい、 $\vec{a} + \vec{b}$ と書く。すなわち、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

平行四辺形を使って、ベクトルの和を図示することもできる。平行四辺形 ABCD において、 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であるから、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

ベクトルの加法について、次の性質が成り立つ：

ベクトルの加法の性質

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ であるから、 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ となる。ここで、 $\overrightarrow{AA}$ は始点と終点一致した特別な有向線分が表すベクトルと考え、その大きさは 0 であるとする。大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**または**ゼロベクトル**といい、 $\vec{0}$ で表す。零ベクトルの向きは考えない。

零ベクトルに関して、次の性質が成り立つ：

$$\begin{aligned}\vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0}, \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}.\end{aligned}$$

ベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ に対して、 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**といい、 $\vec{a} - \vec{b}$ と書く。一般に、 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ であるから、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

同様に、 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ から、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

ベクトルの減法について、次の性質が成り立つ：

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}), \\ \vec{a} - \vec{a} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対して、 $\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める：

1. $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき、

(1) $k > 0$ ならば、 $\vec{a}$ と向きが同じで、大きさが k 倍のベクトルで、特に $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ で、

(2) $k < 0$ ならば、 $\vec{a}$ と向きが反対で、大きさ $|k|$ 倍のベクトルで、

(3) $k = 0$ ならば、 $\vec{0}$ とする。すなわち、 $0\vec{a} = \vec{0}$ である。

2. $\vec{a} = \vec{0}$ のとき、どんな k に対しても $k\vec{0} = \vec{0}$ とする。

$(-2)\vec{a} = -(2\vec{a})$ が成り立つので、これらを単に $-2\vec{a}$ と書く。

k, l は実数とする。ベクトルの実数倍について、次の性質が成り立つ：

ベクトルの実数倍の性質

$$\begin{aligned}k(l\vec{a}) &= (kl)\vec{a}, \\(k+l)\vec{a} &= k\vec{a} + l\vec{a}, \\k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b}.\end{aligned}$$

これまでに学んだ性質により、ベクトルの加法、減法、実数倍の計算では、 $\vec{a}, \vec{b}$ などの式を文字式と同じように扱うことができる。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は、向きが同じか反対のとき、**平行**であるといい、 $\vec{a} // \vec{b}$ と書く。

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、ベクトルの実数倍の定義により、次のことが成り立つ：

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \text{「}\vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある」}.$$

大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という。

一般に、 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行でないとき、どんなベクトル $\vec{p}$ も、 $\vec{a}, \vec{b}$ と適当な実数 s, t と適当な実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形に表すことができる。しかも、この表し方はただ 1 通りである。

1.3 ベクトルの成分

座標平面上でベクトルを考えると、ベクトルの表示に座標を利用する方法がある。ここでは、この方法について学ぶ。

O を原点とする座標平面上で、 x 軸、 y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを**基本ベクトル**といい、それぞれ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ で表す。

座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ である点 A の座標が (a_1, a_2) のとき、 $\vec{a}$ は次のように表される：

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$

この $\vec{a}$ を次のようにも書く：

$$\vec{a} = (a_1, a_2). \quad (1)$$

式 (1) の a_1, a_2 を、それぞれ $\vec{a}$ の x 成分、 y 成分といい、まとめて $\vec{a}$ の**成分**という。さらに、式 (1) を $\vec{a}$ の**成分表示**という。

基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ と零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は、次のようになる：

$$\vec{e}_1 = (1, 0),$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1),$$

$$\vec{0} = (0, 0).$$

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ について、次が成り立つ：

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2.$$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ のとき、次のことがいえる：

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

ベクトルの和、差、実数倍を成分表示すると、次のことが成り立つ：

和、差、実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2) \pm (b_1, b_2) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2),$$

$$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2),$$

ただし、 k は実数とした。

1.4 ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、1 点 O を定め、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ となる点 A, B をとる。このようにして定まる $\angle AOB$ の大きさ θ を、 $\vec{a}, \vec{b}$ の**なす角**という。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す⁴⁾：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を 0 と定める。

4) 2 つのベクトルの内積は、ベクトルではなく実数である。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の成分表示を $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ とすると、余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 &= (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y \end{aligned}$$

となり、 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ のとき、ベクトルの内積は、その成分を用いて次のように表される：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

これは、 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ。

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ は $\vec{0}$ でないとし、そのなす角を θ とする。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。内積の定義から次のことが成り立つ：

ベクトルのなす角の余弦

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° のとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい、 $\vec{a} \perp \vec{b}$ と書く。 $\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。逆に、 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ が $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ になるのは、 $\vec{a} \perp \vec{b}$ のときである。したがって、 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトルについて、 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 次のことが成り立つ：

ベクトルの垂直条件

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\iff a_x b_x + a_y b_y = 0. \end{aligned}$$

ベクトルの内積について、次の性質が成り立つ：

内積の性質

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

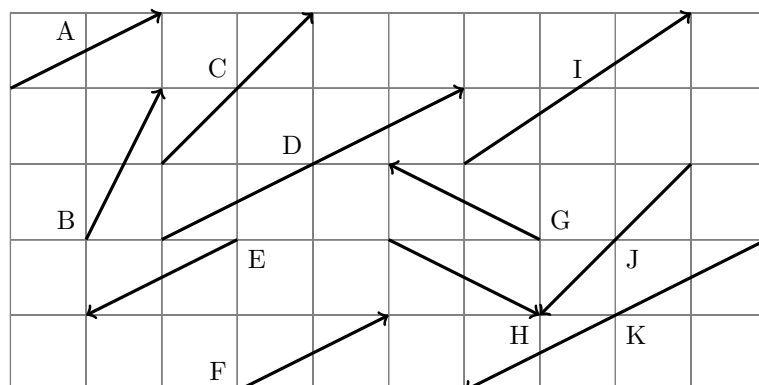
ただし、 k は実数とした。

2 演習問題

1. 下の図において、A のベクトルと比較して、

- (1) 向きが同じベクトル
- (2) 大きさが等しいベクトル
- (3) 等しいベクトル
- (4) 逆ベクトル
- (5) 平行なベクトル

を選べ。



2. 次の等式が成り立つことを示せ：

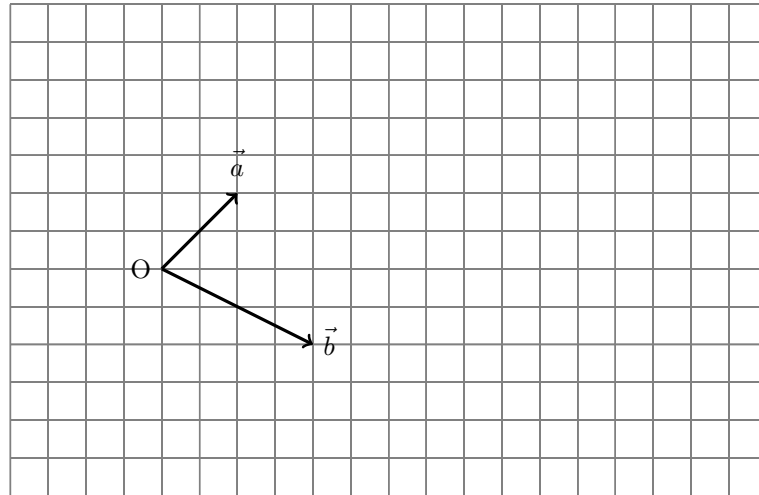
$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{SQ}.$$

3. 下の図のベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ について、次のベクトルを点 O を始点とする有向線分で表せ。

- (1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) $3\vec{a}$

(3) $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$



4. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\vec{a} + 2\vec{a} - 5\vec{a}$

(2) $-3(2\vec{a} - 3\vec{b}) - 4(-3\vec{a} - 2\vec{b})$

5. 等式 $2\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{x} - 3\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

6. $|\vec{a}| = 6$ のとき、 $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

7. 平行四辺形 OACB において、対角線の交点を M とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{AM}$

(3) $\overrightarrow{OC}$

(4) $\overrightarrow{OM}$

8. 正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{EC}$

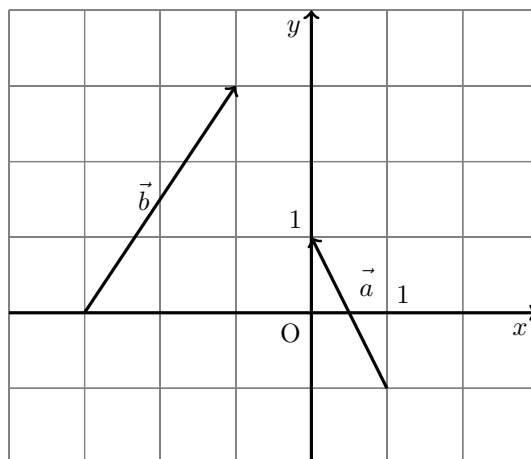
(3) $\overrightarrow{CA}$

(4) $\overrightarrow{EA}$

9. 下の図の $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ について、次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $-2\vec{a}$

(2) $2\vec{a} - 3\vec{b}$



10. $\vec{a} = (-1, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, -3)$ のとき、ベクトル $\vec{p} = (-5, 3)$ を $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ。

11. 2つのベクトル $\vec{a} = (3, 4)$ 、 $\vec{b} = (-6, t)$ が平行になるように、 t の値を定めよ。

12. 次の2点 $A(1, 3)$ 、 $B(2, 5)$ について、 $\overrightarrow{AB}$ を成分表示せよ。また、その大きさを求めよ。
13. 4点 $A(-2, 3)$ 、 $B(2, x)$ 、 $C(8, 2)$ 、 $D(y, 7)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ が平行四辺形となるように、 x と y の値を定めよ。
14. $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 4$ とし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (1) $\theta = 30^\circ$
- (2) $\theta = 90^\circ$
15. $\triangle ABC$ は、 $AB = 5$ 、 $AC = 2$ 、 $\angle BAC = 60^\circ$ で、頂点 C から、底辺 AB に垂線 CH を下ろす。次の内積を求めよ。
- (1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CH}$
- (2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
16. 次の2つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の内積と、そのなす角 θ を求めよ。
- (1) $\vec{a} = (3, 6)$ 、 $\vec{b} = (2, -6)$
- (2) $\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (3, -6)$
17. 次の2つのベクトル $\vec{a} = (3, k)$ 、 $\vec{b} = (2, -k)$ が垂直となるように、 k の値を定めよ。
18. $\vec{a} = (1, -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。
19. 等式 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} + 2\vec{b}) = |\vec{p}|^2 - (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ を示せ。
20. $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 1$ で、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、ベクトル $2\vec{a} + 3\vec{b}$ の大きさを求めよ。