

# 古谷数学教室第 8 回

## 平面ベクトル 2、空間ベクトル

2025 年 5 月 14 日

### 1 基礎事項

#### 1.1 位置ベクトル

平面上で、点  $O$  を定めておくと、どんな点  $P$  の位置も、ベクトル  $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$  によって決まる。このようなベクトル  $\vec{p}$  を、点  $O$  に関する点  $P$  の位置ベクトルという。また、位置ベクトルが  $\vec{p}$  である点  $P$  を、 $P(\vec{p})$  で表す。

2 点の位置ベクトルが同じならば、その 2 点は一致する。

位置ベクトルにおける点  $O$  は、平面上のどこに定めてもよい。以下、とくに断らない限り、1 つ定めた点  $O$  に関する位置ベクトルを考える。

2 点  $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$  に対して、線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $P(\vec{p})$ 、 $m:n$  に外分する点を  $Q(\vec{q})$  とする。一般に、次のことが成り立つ：

#### 内分点・外分点の位置ベクトル

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}, \\ \vec{q} &= \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n}.\end{aligned}$$

3 点  $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$ 、 $C(\vec{c})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の位置ベクトル  $\vec{g}$  は、

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

#### 1.2 ベクトルの図形への応用

異なる 2 点  $A$ 、 $B$  を通る直線  $AB$  上に点  $C$  があるとき、 $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  が平行であるか、または、 $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  である。

したがって、次のことが成り立つ：

「点 C が直線 AB 上にある」 $\iff$ 「 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$  となる実数  $k$  がある」.

### 1.3 図形のベクトルによる表示

点  $A(\vec{a})$  を通り、ベクトル  $\vec{d}$  に平行な直線を  $g$  とする。直線  $g$  上のどんな点  $P(\vec{p})$  に対しても、 $\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$  となる実数  $t$  がただ 1 つ定まる。

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$  であるから、次の式が得られる：

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}. \quad (1)$$

式 (1) において、 $t$  がすべての実数値をとって変化すると、点  $P(\vec{p})$  の全体は直線  $g$  になる。式 (1) を直線  $g$  のベクトル方程式といい、実数  $t$  を媒介変数という。また、 $\vec{d}$  を直線  $g$  の方向ベクトルという。

O を原点とする座標平面上で、点  $A(a_x, a_y)$  を通り、 $\vec{d} = (d_x, d_y)$  に平行な直線  $g$  上の点を  $P(x, y)$  とする。これより、ベクトル方程式 (1) から

$$\begin{cases} x = a_x + td_x \\ y = a_y + td_y \end{cases} \quad (2)$$

が得られる。式 (2) を、直線  $g$  の媒介変数表示という。式 (2) から  $t$  を消去すると、次の式を得る：

$$d_y(x - a_x) - d_x(y - a_y) = 0.$$

点  $A(\vec{a})$  を通る直線  $g$  上に A と異なる点  $B(\vec{b})$  があるとき、式 (1) で

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

とすると、直線  $g$  上の点  $P(\vec{p})$  について、次の式が得る：

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}. \quad (3)$$

式 (3) において、 $1-t=s$  とすると、 $0 \leq t \leq 1$  のとき、 $\geq 0$  であるから、次の式を満たす点  $P(\vec{p})$  の存在範囲は、線分 AB である：

$$\begin{cases} \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \\ s + t = 1 \\ s \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}.$$

点  $A(\vec{a})$  を通り、ベクトル  $\vec{n}$  に垂直な直線を  $g$  とする。直線  $g$  上の点  $P(\vec{p})$  が A に一致しないとき、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP} = 0$  となり、次の式を得る：

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0. \quad (4)$$

P が A に一致するときは、 $\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$  であるから、このときも式 (4) は成り立つ。

式 (4) は、点 A( $\vec{a}$ ) を通り、 $\vec{n}$  に垂直な直線  $g$  のベクトル方程式である。直線  $g$  に垂直なベクトル  $\vec{n}$  を、直線  $g$  の**法線ベクトル**という。

式 (2) のときと同様に、点 A( $a_x, a_y$ ) を通り、 $\vec{n} = (n_x, n_y)$  に垂直な直線方程式は

$$n_x(x - a_x) + n_y(y - a_y) = 0$$

である。

点 A( $\vec{a}$ ) を中心とする半径  $r$  の円を考える。この円上のどんな点 P( $\vec{p}$ ) に対しても、次の式が成り立つ：

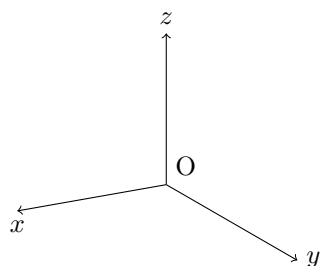
$$|\vec{p} - \vec{a}| = r. \quad (5)$$

これより、次の円のベクトル方程式を得る：

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2.$$

## 1.4 空間の点

空間に点 O をとり、O で互いに直交する 3 本の数直線を、下の図のように定める。



$x$  軸と  $y$  軸で定まる平面を  $xy$  平面、 $y$  軸と  $z$  軸で定まる平面を  $yz$  平面、 $z$  軸と  $x$  軸で定まる平面を  $zx$  平面といい、これらをまとめて**座標平面**という。

空間の点 P に対して、P を通り、各座標軸に垂直な平面が、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸と交わる点を、それぞれ A、B、C の各座標軸上での座標が、それぞれ  $a$ 、 $b$ 、 $c$  のとき、3 つの実数の組  $(a, b, c)$  を点 P の**座標**といい、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  をそれぞれ点 P の  $x$  座標、 $y$  座標、 $z$  座標という。この点 P( $a, b, c$ ) と書くことがある。座標の定められた空間を**座標空間**という。

原点と点 P( $a, b, c$ ) の距離は、

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

である。

## 1.5 空間のベクトル

空間において、始点 A、終点 B とする。有向線分 AB が表すベクトルを  $\overrightarrow{AB}$  で表す。

つまり、空間のベクトルも平面と同様に表す。

空間において、同じ平面上にない 4 点 O、A、B、C が与えられ、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とする。この空間のどんなベクトル  $\vec{p}$  も、適当な実数  $s$ 、 $t$ 、 $u$  を用いて次のように表せる：

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}.$$

## 1.6 ベクトルの成分

座標空間において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  となる点 A の座標が  $(a_x, a_y, a_z)$  であるとする。このとき、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

が成り立つ。

平面上の場合と同様に、空間のベクトルの和、差、実数倍の成分表示について次のことが成り立つ：

### 和、差、実数倍

$$(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$k(a_x, a_y, a_z) = (ka_x, ka_y, ka_z).$$

ただし、 $k$  は実数である。

## 1.7 ベクトルの内積、外積

空間ベクトルの内積も、平面ベクトルと同様である。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

とする。外積の定義は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (\text{ただし } \theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

である。 $|\vec{a} \times \vec{b}| \geq 0$  なので、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

となる。

## 1.8 座標空間における図形

明らかに、次のことがいえる：

### 座標平面に平行な平面の方程式

点  $A(\alpha, 0, 0)$  を通り、 $yz$  平面に平行な平面の方程式は  $x = \alpha$ .

### 球面の方程式

点  $(a, b, c)$  を中心とする半径  $r$  の球面の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

## 2 演習問題

1. 2点  $A(\vec{a})$ 、 $B(\vec{b})$  を結ぶ線分  $AB$  について、次の点の位置ベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。

(1)  $3:5$  に内分する点

(2)  $3:5$  に外分する点

2.  $\triangle ABC$  の辺  $BC$ 、 $CA$  を  $2:3$  に内分する点をそれぞれ  $D$ 、 $E$ 、 $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とする。次のベクトルを  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  を用いて表せ。

(1)  $\overrightarrow{DE}$

(2)  $\overrightarrow{AG}$

3. 六角形  $ABCDEF$  の各辺の中点を順に  $L$ 、 $M$ 、 $N$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $R$  とするとき、 $\triangle LNQ$  の重心と  $\triangle MPR$  の重心は一致することを証明せよ。

4.  $\triangle ABC$  の重心  $G$ 、同じ平面上の任意の点を  $P$  とするとき、等式  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} - 2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{GC}$  が成り立つことを証明せよ。

5. 3点  $(1, x)$ 、 $(x, 0)$ 、 $(-1, 6)$  が一直線上にあるように、 $x$  の値を定めよ。

6.  $\angle A$  が直角である直角二等辺三角形  $ABC$  の3つの辺  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  を  $3:2$  に内分する点をそれぞれ  $L$ 、 $M$ 、 $N$  とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  とするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{AL}$ 、 $\overrightarrow{NM}$  を  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。

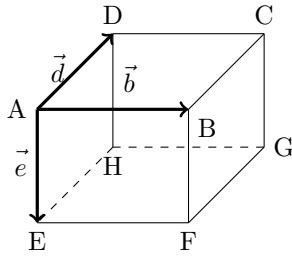
(2)  $\overrightarrow{AL} \perp \overrightarrow{NM}$  であることを示せ。

7.  $\vec{a} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{b} \neq \vec{0}$  で  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないとする。等式  $s\vec{a} + (3-2t)\vec{b} = \vec{0}$  を満たす実数  $s$ 、 $t$  の値を求めよ。

8. 点  $A(2, -1)$  を通り、 $\vec{d} = (-1, 2)$  が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を、媒介変数を  $t$  として求めよ。また、 $t$  を消去した式で表せ。

9. 次の2点  $A(2, 4)$ 、 $B(1, -1)$  を通る直線の媒介変数表示を、媒介変数を  $t$  として求めよ。また、 $t$  を消去した式で表せ。
10. 次の点  $A(1, 2)$  を通り、 $\vec{n} = (1, -2)$  が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。
11. 次のような円、直線の方程式を、ベクトルを利用して求めよ。
- (1) 点  $C(3, 2)$  が中心で、点  $A(1, 1)$  を通る円
- (2) 2点  $A(1, 4)$ 、 $B(3, 0)$  を直径の両端とする円
12. 2直線  $2x + 4y + 1 = 0$ 、 $x - 3y + 7 = 0$  のなす鈍角  $\alpha$  を求めよ。
13. 点  $P(-3, 6, -5)$  から、 $xy$  平面、 $yz$  平面、 $zx$  平面に下ろした垂線をそれぞれ  $PL$ 、 $PM$ 、 $PN$  とするとき、3点  $L$ 、 $M$ 、 $N$  の座標を求めよ。
14.  $xy$  平面、 $z$  軸、原点に関して、点  $(-2, -3, 4)$  と対称な点の座標を求めよ。
15. 2点  $A(1, -2, 3)$ 、 $B(3, 2, -2)$  の2点間距離を求めよ。
16. 3点  $A(1, 2, 3)$ 、 $B(3, 1, 5)$ 、 $C(2, 4, 3)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  はどのような三角形か答えよ。
17. 3点  $A(3, 1, 2)$ 、 $B(-1, 3, 0)$ 、 $C(2, -1, 1)$  から等距離にある  $yz$  平面上の点  $P$  の座標を求めよ。
18. 正四面体の3つの頂点が  $A(0, 1, -2)$ 、 $B(3, 4, -2)$ 、 $C(0, 4, 1)$  であるとき、第4の頂点  $D$  の座標を求めよ。

19. 下の図のような平行六面体  $ABCD - EFGH$  において、次のベクトルを  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$  を用いて表せ。



(1)  $\overrightarrow{DG}$

(2)  $\overrightarrow{CE}$

20. 四面体  $ABCD$  において、等式  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$  が成り立つことを証明せよ。

21.  $\vec{a} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, 1)$  のとき、ベクトル  $2\vec{a} + 3\vec{b}$  を成分表示せよ。

22.  $B(1, -1, 1)$ ,  $C(2, 1, -1)$  のとき、ベクトル  $\overrightarrow{BC}$  を成分表示せよ。また、その大きさを求めよ。

23.  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, 5)$ ,  $\vec{c} = (1, 3, 2)$  のとき、ベクトル  $\vec{p} = (0, 3, 12)$  を  $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$  の形に表せ。