

古谷数学教室第 10 回

図形と方程式 2

2025 年 6 月 3 日

1 基礎事項

1.1 直線の方程式

一般に、 x 、 y の方程式を満たす点 (x, y) 全体が図形 F であるとき、その方程式を図形 F の方程式という。

点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は、次で表される：

直線の方程式 1

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

異なる 2 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) を通る直線の方程式は、次で表される：

直線の方程式 2

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) & x_1 \neq x_2 \\ x = x_1 & x_1 = x_2 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) & x_1 \neq x_2 \\ x = x_1 & x_1 = x_2 \end{cases}.$$

直線が x 軸、 y 軸とそれぞれ点 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ で交わる時、 a をこの直線の x 切片、 b をこの直線の y 切片という。

1.2 2 直線の関係

異なる 2 直線 $y = m_1x + k_1$ 、 $y = m_2x + k_2$ について、般に、次のことが言える：

2 直線の平行、垂直

$$m_1 = m_2 \iff \text{「2 直線が平行」},$$
$$m_1 m_2 = -1 \iff \text{「2 直線が垂直」}.$$

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を d とする。このとき、次が成り立つ：

点と直線の距離

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

証明 原点と直線 $ax + by + c = 0$ の距離が

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となることを示す。そのあと、点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ を、 x 軸方向に $-x_1$ 、 y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動したとき、原点と直線 $a(x + x_1) + b(y + y_1) + c = 0$ との距離と点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は等しいことを利用すればよい ■

1.3 円の方程式

点 $C(c_x, c_y)$ から一定の距離 r にある点 P の全体は、 C を中心とする半径 r の円である：

円の方程式

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2.$$

1.4 円と直線

円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2 + bx + c = 0$ とする。この 2 次方程式が実数解をもつとき、円と直線は共有点をもつ。実数解をもたないときは、共有点をもたない。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(p_x, p_y)$ における接線の方程式について、一般に、次のことが成り立つ：

円上の点における接線の方程式

$$p_x x + p_y y = r^2.$$

1.5 2つの円

半径がそれぞれ R 、 r である 2 つの円の中心間の距離を d とする。このとき、 $R > r$ とすると、2 つの円の位置関係について、次のようになる¹⁾：

1. $d > R + r$ のとき、一方が他方の外部になる。
2. $d = R + r$ のとき、外接する。
3. $R - r < d < R + r$ のとき、2 点で交わる。
4. $d = R - r$ のとき、内接する。
5. $d < R - r$ のとき、一方が他方の内部にある。

1.6 軌跡と方程式

一般に、ある条件を満たしながら動く点が描く図形を、その条件を満たす点の軌跡という。

1.7 不等式の表す領域

座標平面上で、 x 、 y の不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合を、その不等式の表す領域という。

1) これを覚えようとは思わない方がよい。絵を描けば理解できる。

2 例題

1. 中心が点 $(4, 3)$ で、円 $x^2 + y^2 = 1$ に外接する円の方程式を求めよ。
2. 2点 $A(0, 2)$ 、 $B(4, 0)$ に対して、 $AP = BP$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。
3. 原点 O からの距離と点 $A(3, 0)$ からの距離の比 $2 : 1$ である点 P の軌跡を求めよ。
4. 不等式 $2x + y - 3 \leq 0$ の表す領域を図示せよ。
5. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ 2x + y < 4 \end{cases} .$$

3 演習問題

1. 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-1, 2)$ を通り、傾きが 3

(2) 点 $(-2, 3)$ を通り、 x 軸に垂直

2. 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(-4, 3)$ 、 $(6, -3)$

(2) $(2, 5)$ 、 $(-3, 5)$

(3) $(-2, 4)$ 、 $(-2, -1)$

(4) $(-3, 0)$ 、 $(0, 5)$

3. 2 直線 $y = 3x$ 、 $x + 3y - 6 = 0$ は、平行、垂直のいずれであるか答えよ。

4. 点 $(-1, 3)$ を通り、次の直線に平行な直線、垂直な直線の方程式を求めよ。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $x = 6$

5. 直線 $3x - 2y + 1 = 0$ に関して、点 $(2, -3)$ と対称な点の座標を求めよ。

6. 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) $(1, 2)$ 、 $x - 2y + 8 = 0$

(2) $(-2, 5)$ 、 $x = 3$

7. 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(2, 1)$ で原点を通る。

(2) 中心が $(1, 3)$ で x 軸に接する。

(3) 直径の両端が $(2, 5)$ 、 $(4, -7)$ である。

8. 次の方程式はどのような図形を表すか答えよ。

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 10 = 0$

(2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0$

9. 3点 $(1, 0)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(3, -3)$ を通る円の方程式を求めよ。

10. 次の円と直線の位置関係（異なる 2 点で交わる、接する、共有点を持たない）を調べよ。また、共有点があるときは、その座標を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 5$ 、 $y = 3x - 5$

(2) $x^2 + y^2 = 2$ 、 $x + y = 2$

(3) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 、 $x + 2y + 6 = 0$

11. 次の円の、円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 34$ 、 $P(3, -5)$

(2) $x^2 + y^2 = 1$ 、 $P(1, 0)$

12. 点 $(2, 1)$ を中心とし、直線 $4x - 3y + 2 = 0$ に接する円の方程式を求めよ。

13. 次の 2 つの円の位置関係（異なる 2 点で交わる、外接する、内接する、共有点を持たない）を調べよ。

(1) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 、 $(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 25$

(2) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 、 $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 、 $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$

14. 中心が $(6, 8)$ で、円 $x^2 + y^2 = 49$ と外接する円を求めよ。

15. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1) 点 $(1, 2)$ からの距離が 3 である点 P

(2) O を原点とすると、直線 OP の傾きが 2 である点 P

(3) 2 点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ に対して、 $\angle APB = 90^\circ$ となる点 P

(4) 2 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ からの距離の 2 乗の和が 26 の点 P

(5) 3 点 $A(0, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, 2)$ について、 $2AP^2 = BP^2 + CP^2$ である点 P

(6) 2 点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 2)$ からの等距離にある点 P

(7) 2 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(1, 0)$ からの距離の比が $1 : 2$ である点 P

16. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y \geq 4 - 3x$

(2) $2x + y + 2 < 0$

(3) $y < 2$

(4) $x^2 + y^2 \geq 4$

(5) $(x - 1)^2 + y^2 < 1$

(6) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 > 0$

$$(7) \quad \begin{cases} y > 2x - 1 \\ y < -x + 5 \end{cases}$$

$$(8) \quad 4 < x^2 + y^2 \leq 16$$

$$(9) \quad (2x + y - 4)(x - y + 1) \leq 0$$

$$(10) \quad (y - x)(x^2 + y^2 - 1) > 0$$