

古谷数学教室第 11 回

数列 1

2025 年 6 月 11 日

1 基礎事項

ここでは、断りが無い限り n は自然数とする。

1.1 数列と一般項

一般に、数を一列に並べたものを**数列**といい¹⁾、数列における各数を**項**という。

数列の項は、最初の項から順に第 1 項、第 2 項、第 3 項、 $\dots$ といい、 n 番目の項を第 n 項という。とくに、第 1 項を**初項**という。

数列を一般的に表すには、次のように書く：

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

この数列を $\{a_n\}$ と略記することもある。たとえば、数列 $\{n^2\}$ は、次を意味する：

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき、 n に 1、2、3、 $\dots$ を順に代入すると、数列 $\{a_n\}$ の初項、第 2 項、第 3 項、 $\dots$ が得られる。このような a_n を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という。

1.2 等差数列

一般に、初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を**等差数列**といい、その一定の数 d を**公差**という。

初項 a 、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、次の式で表される：

等差数列の一般項

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

1) 項の個数が有限である数列を**有限数列**、無限である数列を**無限数列**ということがある。

1.3 等差数列の和

初項 a 、公差 d の等差数列において、第 n 項が l のとき、初項から第 n 項までの和を S_n で表すと、次の式で表される：

等差数列の和

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l),$$
$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}.$$

項の個数が有限である数列では、その項の個数を**項数**といい、最後の項を**末項**（まっこう）という。

1.4 等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を**等比数列**といい、その一定の数 r を**公比**という²⁾。

初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は、次の式で表される：

等比数列の一般項

$$a_n = ar^{n-1}.$$

1.5 等比数列の和

初項 a 、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は次の式で表される：

等比数列の和

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \text{ のとき} \\ na & r = 1 \text{ のとき} \end{cases}.$$

2) 初項と公比は 0 であってもよいが、このプリントで扱う等比数列は、初項も公比も 0 でないものとする。

1.6 和の記号

数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 n までの和を、第 k 項の a_k と和の記号 Σ を用いて $\sum_{k=1}^n a_k$ と書く：

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

自然数の和について、次が成り立つ：

自然数に関する和の公式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n c &= nc, \\ \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2}n(n+1), \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

また、次の性質が成り立つ：

Σ の性質

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \\ \sum_{k=1}^n p a_k &= p \sum_{k=1}^n a_k.\end{aligned}$$

1.7 階差数列

一般に、数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差

$$a_{n+1} - a_n = b_n$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を、数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、次のことがいえる：

階差数列と一般項

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

$n = 1$ のとき、

$$a_n = a_1.$$

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると、次のことがいえる：

数列の和と一般項

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

$n = 1$ のとき、

$$a_1 = S_1.$$

2 演習問題

ここでは、断りがない限り、 n は自然数とする。

1. 次の等差数列について、[] に指定されたものを求めよ。

(1) 公差 3、第 7 項 10 [初項]

(2) 初項 100、第 6 項 65 [公差]

2. 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 5 項が 10、第 10 項が 20

(2) 第 10 項が 100、第 100 項が 10

3. 次の数列が等差数列であるとき、 k の値を求めよ：

$$4, k, 6k.$$

4. 次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 3、末項 21、項数 10

(2) 初項 50、公差 -2 、項数 26

5. 初項 2、公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 S_n および S_{10} を求めよ。

6. 次の等差数列の初項から第 n 項までの和を求めよ：

$$4, 1, -2, \dots$$

7. 次の等差数列の和を求めよ：

$$85, 78, 71, \dots, 43.$$

8. 第 5 項が 12、初項から第 5 項までの和が 20 の等差数列の初項と公差を求めよ。

9. 30 から 100 までの自然数のうち、次のような数の和を求めよ。

(1) 20 の倍数

(2) 5 で割り切れない数

10. 次の等比数列について、[] に指定されたものを求めよ。

(1) 初項 5、公比 2 [第 8 項]

(2) 公比 -2 、第 6 項 160 [初項]

(3) 初項 2、第 4 項 54 [公比 (実数)]

11. 次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。また、一般項を求めよ。ただし、公比は実数とする。

(1) 第 3 項が 36、第 6 項が 972

(2) 第 3 項が 12、第 7 項が 192

12. 次の数列が等比数列であるとき、 k の値を求めよ。

(1) $4, k, k-1$

(2) $k, 6, k+5$

13. 初項 4、公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 S_n および S_{10} を求めよ。

14. 初項 1、公比 2、末項 64 の等比数列の和を求めよ。

15. 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ：

$$-1, 2, -4, \dots$$

16. 次の和を、 Σ を用いないで、各項を書き並べて表せ。

$$(1) \sum_{k=5}^{10} 2^k$$

$$(2) \sum_{k=2}^5 (k+2)^2$$

17. 次の数列の和を記号 Σ を用いて表せ：

$$1, 4, 9, \dots, 64.$$

18. 次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n 2 \cdot 3^{k-1}$$

$$(2) \sum_{k=4}^9 k^2$$

$$(3) \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k)$$

19. 次の数列の第 k 項、および初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$(1) 1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$$

$$(2) 1^3, 3^3, 5^3, 7^3, \dots$$

20. 次の数列について、階差数列 $\{b_n\}$ の一般項と与えられた数列の一般項を求めよ。

$$(1) 1, 2, 6, 15, 31, \dots$$

$$(2) 1, 2, 5, 14, 41, \dots$$

21. 初項から第 n 項までの和が次の式で表される数列の一般項を求めよ。

$$(1) n^3 + 2$$

$$(2) \quad 2^n + 3$$