

古谷数学教室第 12 回

数列 2

2025 年 6 月 25 日

1 基礎事項

ここでは、断りがない限り n は自然数とする。

1.1 漸化式

数列では、初項と隣り合う 2 項間の関係がわかれば、すべての項が定まる。例えば、

$$a_1 = 3, \quad (1)$$

$$a_{n+1} = 2a_n \quad (2)$$

の式 (2) のように、数列において前の項から次の項¹⁾ を決めるための関係式を**漸化式**（ぜんかしき）という。

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は

$$a_{n+1} = a_n + d$$

である。ここで、 d は公差を意味する。

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は

$$a_{n+1} = ra_n$$

である。ここで、 r は等比を意味する。

漸化式が $a_{n+1} = a_n + f(n)$ の形の場合は、階差数列を利用する方法で、一般項が求められる。

1.2 数学的帰納法

自然数は限りなくあるから、この事実をすべての n について確かめる²⁾ ことはできない。だが、**数学的帰納法**と呼ばれる「自然数 n を含む等式や不等式などがすべての自然数 n について成り立つ」と結論する次の証明方法がある：

1) 前の項と次の項とは、例えば a_k が前の項、 a_{k+1} が次の項である。

2) ここでいう確かめるとは、 $n = 1, 2, 3, \dots$ とすべての自然数を等式に代入して調べるということを意味する。

数学的帰納法

1. $n = k$ のとき、 n についての等式、不等式が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときもその等式、不等式が成り立つ。
2. $n = 1$ のとき、その等式、不等式が成り立つ。

2 例題

1. 次の和 S を求めよ：

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

2. 恒等式

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

を利用して、次の和 S を求めよ：

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

3. 次の和 S を求めよ：

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 10 \cdot 9^9.$$

4. 次の和 S を求めよ：

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + 7 \cdot 3^6.$$

5. 正の偶数の列を、次のような群に分ける：

$$2 \mid 4, 6 \mid 8, 10, 12 \mid 14, 16, 18, 20 \mid 22, \dots$$

ただし、第 n 群には、 n 個の数が入るものとする。

- (1) $n \geq 2$ のとき、第 n 群の最初の数 a_n を n の式で表せ。

- (2) 第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

6. 正の奇数の列を、次のような群に分ける：

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, \dots$$

ただし、第 n 群には n 個の数が入るものとする。

(1) $n \geq 2$ のとき、第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2) 第 15 群に入るすべての数の和を求めよ。

7. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ：

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4.$$

8. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ：

$$a_1 = -2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4.$$

3 演習問題

ここでは、断りがない限り、 n は自然数とする。

1. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = -5a_n$

2. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 4n$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 4^n$

3. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$

4. 数学的帰納法によって、次の等式を証明せよ：

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1).$$