古谷数学教室第 16 回

図形の性質 1

2025 年 8 月 6 日

1　基礎事項

1.1　三角形の辺の比

m、n を正の数とする。線分 AB 上の点 P が

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

を満たすとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という。

次に、m、n を異なる正の数とする。線分 AB の延長上の点 Q が

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という。

三角形の角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ：

三角形の角の二等分線と比（定理 1）

△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点は、辺 BC を AB : AC に内分する。

準備　次の性質がある：

平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき、同位角は等しい。また、錯角も等しい。　(1)

また、△ABC において、直線 AB 上に点 P、直線 AC 上に点 Q があるとき、次が成り立つ：

「直線 PQ と直線 BC が平行」

$\Longleftrightarrow$AP : PB = AQ : QC かつ AP : AB = AQ : AC かつ AP : AB = PQ : BC.　(2)

証明　∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると、

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{DAC}. \tag{3}$$

頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き、辺 AB の A を超える延長との交点を E とすると、AD//EC から、性質 (1) より、

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{AEC}, \tag{4}$$

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{ACE}. \tag{5}$$

式 (3)、式 (4)、式 (5) から、△ACE において $\angle \mathrm{AEC} = \angle \mathrm{ACE}$ となるから（△ACE は二等辺三角形となり)、

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AC}. \tag{6}$$

また、AD//EC から、性質 (2) より、

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AE}. \tag{7}$$

したがって、式 (7) と式 (6) から

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}. \quad \blacksquare$$

三角形の外角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ：

三角形の外角の二等分線と比（定理 2）

AB $\neq$ AC である △ABC の $\angle$A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は、辺 BC を AB : AC に外分する。

証明　AB $>$ AC とする。$\angle$A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D、頂点 C を通り、直線 AD と平行な直線を引き、辺 AB との交点を E とする。このとき、定理 1 の証明と同様に

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}. \quad \blacksquare$$

1.2　三角形の外心、内心、重心

三角形の辺の垂直二等分線について、次の定理が成り立つ：

三角形の辺の垂直二等分線（定理 3）

三角形の 3 辺の垂直二等分線は、1 点で交わる。

準備　線分 AB の垂直二等分線 ℓ と点 P について、次が成り立つ：

$$\text{「点 P が } \ell \text{ 上にある」} \Longleftrightarrow \mathrm{PA} = \mathrm{PB}. \tag{8}$$

証明　△ABC において、辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を O とすると、性質 (8) より、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}, \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OC}.$$

よって、OB ＝ OC となるから、O は辺 BC の垂直二等分線上にもある。したがって、三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。　■

△ABC において、3 辺の垂直二等分線が交わる点を O とすると、点 O は △ABC の 3 つの頂点から等距離にある。よって、この点 O を中心とする半径 OA の円は、△ABC の 3 つの頂点を通る。この円を △ABC の**外接円**といい、点 O を △ABC の**外心**という。

三角形の内心の二等分線について、次の定理が成り立つ：

三角形の内角の二等分線（定理 4）

三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

準備　∠XOY の二等分線 ℓ と点 P について、次が成り立つ：

$$\text{「点 P が } \ell \text{ 上にある」} \Longleftrightarrow \text{「点 P が 2 辺 OX、OY から等距離にある」}. \tag{9}$$

証明　△ABC において、∠B の二等分線と ∠C の二等分線の交点を I とし、I から辺 BC、CA、AB に下ろした垂線を、それぞれ ID、IE、IF とすると、性質 (9) から

$$\mathrm{IF} = \mathrm{ID},\ \mathrm{IE} = \mathrm{ID},\ \mathrm{IF} = \mathrm{IE} \tag{10}$$

となるから、I は ∠A の二等分線上にもある。よって、三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。　■

上の証明により、次のことがいえる：

$$\mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}.$$

よって、この点 I を中心とする半径 ID の円は、△ABC の 3 辺に接する。この円を △ABC の**内接円**といい、点 I を △ABC の**内心**という。

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を、三角形の**中線**という。三角形の中線には、次の性質がある：

三角形の中線（定理 5）

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり、その点は各中線を 2 : 1 に内分する。

三角形の 3 本の抽選が交わる点を、三角形の**重心**という。

準備　△ABC において、辺 AB の中点を M、辺 AC の中点を N とするとき、次の中点連結定理が成り立つ：

$$\mathrm{MN}/\!/\mathrm{BC} \text{ かつ } \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}. \tag{11}$$

証明　△ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G とする。また、中線 AD と中線 BE の交点を G′ とする。

このとき、まず 2 点 G、G′ が一致することを示す。
中点連結定理 (11) より、

$$\mathrm{FE}//\mathrm{BC}, \tag{12}$$

$$\mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1 \tag{13}$$

となり、式 (12) から性質 (2) より、

$$\mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{BC} : \mathrm{FE},$$

すなわち

$$\mathrm{BG} : \mathrm{GE} = 2 : 1. \quad (\because \text{式 (13)}) \tag{14}$$

同様にして

$$\mathrm{BG}' : \mathrm{G}'\mathrm{E} = 2 : 1. \tag{15}$$

線分 BE を 2 : 1 に内分する点は 1 点だけであるから、式 (14) と式 (15) より 2 点 G、G′ は一致する。
したがって、3 本の中線は点 G で交わる。また、

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GD} = 2 : 1,$$

$$\mathrm{BG} : \mathrm{GE} = 2 : 1,$$

$$\mathrm{CG} : \mathrm{GF} = 2 : 1$$

から、3 本の中線が交わる点は各中線を 2 : 1 に内分する。 ■

1.3 チェバの定理・メネラウスの定理

三角形の各張点を通る直線について、次の**チェバの定理**が成り立つ：

チェバの定理（定理 6）

△ABC の内部に点 O がある。頂点 A、B、C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点 P、Q、R で交わるとき、

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1.$$

準備 △ABC について、辺 BC の内分点[1] を P、辺 AP の内分点を O、とする。このとき、次が成り立つ[2]：

$$\frac{\triangle \mathrm{OAB}}{\triangle \mathrm{OCA}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}. \tag{16}$$

1) ここでは、ある線分を内分する点を内分点と呼ぶことにする。
2) 等式において、△OAB などは、その三角形の面積を意味するものとする。

式 (16) を示す。点 B から直線 AP に下ろした垂線の足[3] を H、点 C から直線 AP に下ろした垂線の足を K とすると、

$$\triangle \mathrm{OAB} : \triangle \mathrm{OCA} = \mathrm{BH} : \mathrm{CK}. \tag{17}$$

BH//CK であるから、性質 (2) より

$$\mathrm{BH} : \mathrm{CK} = \mathrm{BP} : \mathrm{PC}. \tag{18}$$

式 (17) と式 (18) から式 (16) が示される。 ■

証明 △ABC の内部に点 O がある。頂点 A、B、C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点 P、Q、R で交わるとき、式 (16) より、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} &= \frac{\triangle \mathrm{OAB}}{\triangle \mathrm{OCA}}, \\
\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} &= \frac{\triangle \mathrm{OBC}}{\triangle \mathrm{OAB}}, \\
\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} &= \frac{\triangle \mathrm{OCA}}{\triangle \mathrm{OBC}},
\end{aligned}$$

となり、これらの積により定理 6 は示される。 ■

三角形と直線について、次の**メネラウスの定理**が成り立つ：

メネラウスの定理（定理 7）

△ABC の辺 BC、CA、AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線 ℓ と、それぞれ点 P、Q、R で交わるとき、

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1.$$

証明 △A の頂点を通り、直線 ℓ に平行な直線を引き、直線 BC との交点を D とする。

このとき、性質 (2) から、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} &= \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}}, \\
\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} &= \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PB}}
\end{aligned}$$

が得られ、

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1. \quad ■$$

3) 直線 BH と AP は垂直に交わり、点 H は直線 AP 上にある。

2 例題

1. 次の問いに答えよ。

(1) 授業を参考に、定理 2 を示せ。

(2) AB = 20、BC = 10、CA = 15 である △ABC において、∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。

3 演習問題

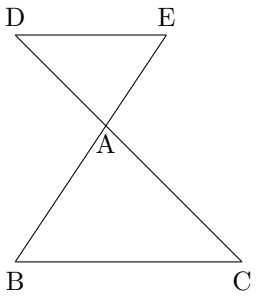
1. 下の図の線分 AB について、次の点を記入せよ[4] 。

(1) 3 : 2 に内分する点 P

(2) 2 : 3 に外分する点 S

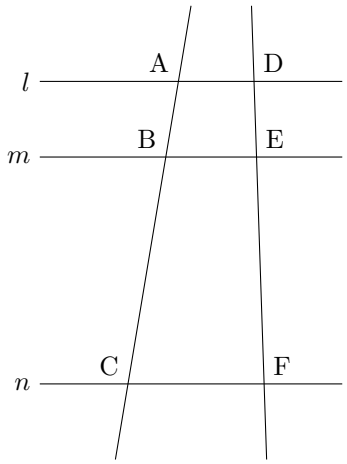
2. 下の図において、x、y の値を求めよ。

(1) BC//DE、AB = 4、AC = 5、AD = 3、AE = x、BC = 6、DE = y

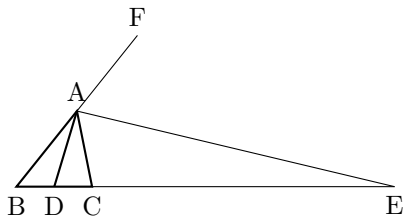


4) ノートにこの図を（手書きでも全く問題はないので）コピーしたもので記入してもよいし、その方が採点するのが楽である。比も大体でよい。

(2) $l//m//n$、AD = 2、DE = 2、BE = 3、EF = x、CF = 5



(3) ∠BAD = ∠DAC、∠CAE = ∠EAF、AB = 12、AC = 8、BC = 10、DC = x、BE = y



3. △ABC の外心を O、内心を I とする。次の α、β の大きさを求めよ。

(1) ∠A = α、∠ABO = 36°、∠ACO = 25°、∠BOC = β。

(2) ∠ACI = α、∠IAB = 35°、∠IBC = 20°、∠BIC = β。

4. AB = 10、BC = 7、CA = 4 である △ABC の内心を I とする。AI と辺 BC の交点を D とするとき、BD : DC、AI : ID をそれぞれ求めよ。

5. △ABC において、辺 BC の中点 D、辺 AC の中点 E とし、線分 AD と線分 BE の交点を F とする。△ABC の面積を S とするとき、△ABD、△ABF の面積をそれぞれ求めよ。

6. △ABC について、点 P、Q、R はそれぞれ辺 BC、CA、AB の内分点である。CQ : QA、AR : RB が以下で与えられているとき、BP : PC を求めよ。

(1) CQ : QA = 5 : 2、AR : RB = 3 : 2

(2) CQ : QA = 4 : 3、AR : RB = 1 : 2

7. △ABC について、次の問いに答えよ。

(1) 辺 BC を 9 : 4 に外分する点を P、辺 CA を 1 : 1 に内分する点を Q とする。また、線分 AB と直線 PQ との交点を P とする。このとき、AR : RB を求めよ。

(2) 辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D、辺 CA を 1 : 2 に内分する点を E とする。また、直線 CD と BE の交点を P とする。このとき、BP : PE、CP : PD を求めよ。

8. 次の長さの線分を 3 辺とする三角形が存在するかどうかを調べよ。

(1) 2、3、6

(2) 5、7、8

9. △ABC において、次のものをそれぞれ調べよ。

(1) AB = $\sqrt{3}$、BC = 3、CA = 2 のとき、3 つの角の大小

(2) ∠A = 60°、∠B = 40° のとき、3 辺の長さの大小

10. △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、AB、BD の長さの大小を比べよ。

4　おまけ

この節では、定理 1 から定理 5 までを、別の方法（主にベクトル）を用いて簡潔に示す。

定理 1　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし、$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = m$、$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}| = n$ とおく。このとき、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = m : n$$

を示す。

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} \frac{1}{(m+n)} \left\{ n|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + m\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \right\} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \frac{1}{(m+n)} \left\{ n\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + m|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \right\}$$

$$(1 - \cos\angle\mathrm{BAC}) \Big(n|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| - m|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \Big) = 0,$$

ここで、$\cos\angle\mathrm{BAC} \neq 0$ より、定理 1 は示される。　■

定理 2　AB $>$ AC を満たす △ABC について、∠A の外角二等分線と辺 BC の延長との交点を D とし、$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = m$、$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = n$ とおく、このとき、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = m : n$$

を示す。

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} \cdot \left(-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} \right) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} \frac{1}{(m-n)} \left\{ n|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| - m\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \right\} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \frac{1}{(m-n)} \left\{ -n\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + m|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \right\}$$

$$(1 + \cos\angle\mathrm{BAC}) \Big(n|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| - m|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \Big) = 0,$$

ここで、$\cos\angle\mathrm{BAC} \neq -1$ より、定理 2 は示される。　■

定理 3　△ABC において、辺 AB の垂直二等分線と辺 CA の垂直二等分線の交点を O とする：

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \right) \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \right) \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0.$$

このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \right) \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \right) \text{ かつ } |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|,$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \text{ かつ } |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

が示され、あとは同じである。 ■

定理 4 △ABC において、∠B の二等分線と ∠C の二等分線の交点を I とし、I から辺 BC、CA、AB に下ろした垂線を、それぞれ ID、IE、IF とする：

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|},$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{CI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ID}} = 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IE}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}} = 0.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{IF}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BA}},$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{IF}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2 - \frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)^2}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2}.$$

同様に、

$$|\overrightarrow{\mathrm{ID}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2 - \frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)^2}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}$$

なので、条件と合わせて

$$|\overrightarrow{\mathrm{IF}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ID}}|$$

が得られる。

同様に、

$$|\overrightarrow{\mathrm{IE}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ID}}|$$

が得られ、これらは逆も成り立つので、あとは同じである[5)]。 ■

5) 正確には、式 (9)（の逆側）に相当する式を示す方がよい。基本的には逆にたどれば証明できるため省略した。

定理 5　△ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G とする。また、中線 AD と中線 BE の交点を G′ とする：

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{CF}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = s\overrightarrow{\mathrm{BE}} \quad \text{for } \exists s \in \mathbb{R},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = t\overrightarrow{\mathrm{CF}} \quad \text{for } \exists t \in \mathbb{R},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG'}} = u\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \text{for } \exists u \in \mathbb{R},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BG'}} = v\overrightarrow{\mathrm{BE}} \quad \text{for } \exists v \in \mathbb{R}.$$

条件より、

$$s = t = u = v = \frac{2}{3}$$

を導出でき[6)]、あとは同じである。　■

6)　授業を参考にせよ。