

古谷数学教室第 17 回

図形の性質 2

2025 年 8 月 20 日

1 基礎事項

1.1 円に内接する四角形

円の弧と弦については、次のような性質がある：

円の弧と弦の性質

1. 1 つの円で、等しい中心角に対する弧の長さは等しい。逆に、長さの等しい弧に対する円周角は等しい。
2. 1 つの円で、長さの等しい弧に対する弦の長さは等しい。
3. 弦の垂直二等分線は、円の中心を通る。
4. 円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を二等分する。

円周角の定理について、確認しておく：

円周角の定理

- 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の大きさの半分である。

円周角の定理は、その逆も成り立つ：

円周角の定理の逆

4点 A、B、P、Q について、点 P、Q が直線 AB に関して同じ側にあつて¹⁾

$$\angle APB = \angle AQB$$

ならば、4点 A、B、P、Q は1つの円周上にある。

1) 決して四角形 APBQ や AQBP などとならないということだと思えばよい。

多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき、この多角形は円に**内接する**という。また、この円をその多角形の**外接円**という。

三角形には必ず外接円が存在するが、三角形以外の多角形では外接円が存在するとは限らない。

円に内接する四角形には、次の性質がある：

円に内接する四角形の性質（定理 8）

1. 対角の和は 180° である。
2. 内角は、その対角の外角に等しい。

証明 四角形が ABCD が円 O^1 に内接するとき、

$$\angle BAD = \alpha, \quad \angle BCD = \beta$$

とする。中心角と円周角の関係により、

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

となるから、 $\alpha + \beta = 180^\circ$ ■

また、 $\angle BCD$ の外角の大きさは、 $180^\circ - \beta = \alpha$ となる。 ■

定理 8 の逆も成り立つ：

四角形が円に内接するための条件（定理 9）

次の 1. または 2. が成り立つ四角形は、円に内接する：

1. 1組の対角の和が 180° である。
2. 内角が、その対角の外角に等しい。

1) 中心が点 O である円を円 O という。

証明 四角形 ABCD において、

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \quad (1)$$

とする。△ABC の外接円 O の、B を含まない弧 AC 上に点 E をとると、四角形 ABCE は円 O に内接する。よって、定理 8 の 1. から、

$$\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ. \quad (2)$$

式 (1)、式 (2) から、

$$\angle ADC = \angle AEC.$$

よって、4 点 A、C、E、D は 1 つの円周上にある。そしてその円は △AEC の外接円 O である。点 B も円周上にあるから、四角形 ABCD は円 O に内接する。 ■

また、定理 9 の 1. と定理 9 の 2. は同値である。 ■

1.2 円と直線

円と直線の位置関係には、次のような 3 つの場合がある：

1. 2 点で交わる。
2. 接する。
3. 離れている。

円と直線が接するとき、それらはただ 1 点を共有する。このとき、この直線を円の接線といい、その共有点を接点という。

円 O の周上の点 A を通る直線 l について、次が成り立つ：

$$\text{「直線 } l \text{ が点 A で円 O に接する」} \iff OA \perp l.$$

この直線 l が、点 A における円の接線である。

円 O には外部の点 P から 2 つの接線を引くことができる。その接点を A、B とするとき、線分 PA または PB の長さを、P から円 O に引いた接線の長さという。

円に引いた 2 つの接線の長さについては、次のことがいえる：

円の外部の 1 点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しい。

円 O の弦 AB の端点 A における円の接線 AT と弦 AB が作る ∠BAT について、直径 AC を引くと、

$$\begin{aligned} \angle BAT + \angle CAB &= 90^\circ, \\ \angle ACB + \angle CAB &= 90^\circ \end{aligned}$$

であるから、

$$\angle BAT = \angle ACB.$$

ここで、点 C を含む弧 AB 上に点 P をとると、 $\angle ACB = \angle APB$ であるから、

$$\angle BAT = \angle APB$$

となる。

一般に、次の定理が成り立つ：

円の接線と弦の作る角（定理 10）

円の接線とその接点を通る弦の作る角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

次の**方べきの定理**が成り立つ：

方べきの定理（定理 11）

円の 2 つの弦 AB、CD の交点、またはそれらの延長の交点を P とすると、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ。

1.3 2 つの円

2 つの円の位置関係には、次の場合がある：

1. 一方が他方の外部にある。
2. 1 点を共有し、外接する。
3. 2 点で交わる。
4. 1 点を共有し、内接する。
5. 一方が他方の内部にある。

2 つの円がただ 1 点を共有するとき、2 つの円は**接する**といい、この共有点を**接点**という。

2 つの円の両方に接する直線を、2 つの円の**共通接線**という。

2 つの円の共通接線には、次のような場合がある：

1. 共通接線 4 本。

2. 共通接線 3 本。
3. 共通接線 2 本。
4. 共通接線 1 本。
5. 共通接線はない。

1.4 作図

作図では、定規とコンパスを用いて、

1. 与えられた 2 点を通る直線を引くこと。
2. 与えられた 1 点を中心として、与えられた半径の円をかくこと。

だけができる。それらの直線や円などの交点を求めて、次々と点、直線、円をかき、条件を満たす図形をかくことが作図である。

直線 l 上にない点 P を通り、 l に平行な直線は、次のように作図する：

1. 点 P を通る直線 l の垂線 m を作図する。
2. 点 P を中心とする円をかき、直線 m との交点をそれぞれ A 、 B とする。
3. 2 点 A 、 B をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、それらの交点の 1 つを C とする。
4. 直線 PC を引く。直線 PC が点 P を通り l に平行な直線である。

与えられた線分 AB を $m : n$ に内分する点は、次のように作図する：

1. 点 A を通り、直線 AB と異なる半直線 l を引く。
2. l 上に、 $AC : CD = m : n$ となるように点 C 、 D をとる²⁾。
3. 点 C を通り、直線 BD に平行な直線を引き、線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。

2) 定規とは、メモリが書いていないものさしを意味する。すなわち、 $m : n$ はコンパスを用いて点 C 、 D をとるのである。

長さ 1 の線分 AB と、長さ a 、 b の 2 つの線分が与えられたとき、長さ $\frac{b}{a}$ の線分は、次のように作図する：

1. 点 A を通り、直線 AB と異なる半直線 l を引く。
2. l 上に、 $AC = a$ 、 $CD = b$ となる点 C、D をとる。
3. D を通り、直線 BC に平行な直線を引き、直線 AB との交点を E とする。線分 BE が求める線分である。

長さ 1 の線分が与えられたとき、無理数で表される線分は次のように作図する：

1. 長さ 1 の正方形を作図する。このとき、対角線が $\sqrt{2}$ である。
2. 対角線の $\sqrt{2}$ と長さ 1 から、三平方の定理より $\sqrt{3}$ の線分が作れる。
3. これを繰り返すと、 n を自然数とすると $\sqrt{n}$ の線分が作れる。

1.5 直線と平面

異なる 2 直線 l 、 m の位置関係には、次の 3 つの場合がある：

1. 1 点で交わる。
2. 平行である。
3. ねじれの位置にある。

2 直線 l と m が平行であるとき、 $l//m$ と書く。異なる 3 直線 l 、 m 、 n について、次のことが成り立つ：

$$l//m \text{ かつ } m//n \implies l//n.$$

2 直線 l 、 m が平行でないとき、任意の 1 点 O を通り、 l 、 m に平行な直線を、それぞれ l' 、 m' とすると、 l' と m' は同じ 1 つの平面上にある。このとき、 l' と m' のなす 2 つの角は、点 O をどこにとっても一定である。この角を 2 直線 l 、 m の**なす角**という。

2 直線 l 、 m のなす角が直角のとき、 l 、 m は**垂直**であるといい、 $l \perp m$ と書く。垂直な 2 直線 l と m が交わるとき、 l と m は**直交**するという。

また、次のことが成り立つ：

平行な 2 直線の一方に垂直な直線は、他方にも垂直である。

直線 l と平面 α の位置関係には、次の 3 つの場合がある：

1. l は α に含まれる。
2. 1 点で交わる。
3. 平行である。

直線 l と平面 α が平行であるとき、 $l // \alpha$ と書く。直線 l が、平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき、 l は α に**垂直**である、または l は α に**直交**するといい、 $l \perp \alpha$ と書く。このとき、 l を平面 α の**垂直**という。

直線と平面の垂直について、次が成り立つことが知られている。

直線 l が、平面 α 上の交わる 2 直線 m 、 n に垂直ならば、直線 l は平面 α に垂直である。

異なる 2 平面 α 、 β の位置関係には、次の 2 つの場合がある：

1. 交わる。
2. 平行である。

2 平面が交わる時、その交わりは直線になり、その直線を**交線**という。2 平面 α 、 β が平行であるとき、 $\alpha // \beta$ と書く。

交わる 2 平面の交線上の点から、各平面上で、交線に垂直に引いた 2 直線のなす角を 2 平面の**なす角**という。2 平面のなす角が直角のとき、 α 、 β は**垂直**である、または**直交**するといい、 $\alpha \perp \beta$ と書く。

2 平面の垂直について、次のことが成り立つ：

平面 α に垂直な直線を含む平面は、 α に垂直である。

1.6 空間図形と多面体

三角錐、四角柱などのように、平面だけで囲まれた立体を**多面体**といい、へこみのない多面体を**凸多面体**という。

次を満たす凸多面体を**正多面体**という：

1. 各面はすべて合同な正多角形である。
2. 各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

正多面体は5種類しかないと知られている。

一般に、凸多面体の頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f とすると、

$$v - e + f = 2$$

が成り立つことが知られている。これを**オイラーの多面体定理**という。

2 演習問題

1. 円に内接する四角形 ABCD について、次の角度を求めよ。
 - (1) $\angle ACB = 30^\circ$ 、 $\angle BDC = 60^\circ$ 、 $\angle CAD = 40^\circ$ のとき、 $\angle ABD$
 - (2) 半直線 AD と半直線 BC の交点を E、 $\angle BAD = 60^\circ$ 、 $\angle BED = 50^\circ$ のとき、 $\angle CDE$
 - (3) 半直線 AD と半直線 BC の交点を P、半直線 AB と半直線 DC の交点を Q、 $\angle DPC = 34^\circ$ 、 $\angle BQC = 28^\circ$ のとき、 $\angle DAB$
2. 円に内接する四角形 ABCD がある。辺 AB、CD 上にそれぞれ点 E、F をとり、 $AD \parallel EF$ となるようにするとき、4 点 B、C、F、E は 1 つの円周上にあることを証明せよ。
3. 次の問いに答えよ。
 - (1) 中心 O、半径 6 の円の円周上の点 P で接する接線 AP について、 $OA = 10$ のとき、AP の長さを求めよ。
 - (2) 三角形 ABC の内接円があり、辺 AB との接点は辺 AB を 4 : 5 に内分し、 $BC = 11$ のとき、AC の長さを求めよ。ただし、 $AB = 9$ とする。
 - (3) 円に内接する三角形 ABC について、 $\angle A = 50^\circ$ 、 $\angle B = 80^\circ$ であり、直線 l が点 C でこの円に接している。このとき、直線 AC と直線 l のなす角を求めよ。
 - (4) 点 P は、円 O の外部の点で、点 P から円 O に引いた接点をそれぞれ A、B とする。円周上の点 C について、 $\angle ACB = 50^\circ$ のとき、 $\angle BPA$ を求めよ。
 - (5) 円周上の 4 点 A、B、C、D について、線分 AB、線分 CD の交点を P とするとき、 $AP = 5$ 、 $CP = 4$ 、 $PD = 3$ であった。このとき、BP の長さを求めよ。
 - (6) 円周上の 4 点 A、B、C、D について、半直線 AB と半直線 CD の交点を P とするとき、 $AB : BP = 5 : 4$ 、 $CD = EP$ であった。このとき、CD の値を求めよ。
 - (7) 円 O の円周上の 2 点 B、C について、線分 BC を 9 : 4 に外分する点を P とし、P から円 O に引いた接線と円の接点を A としたとき、線分 AP の長さを求めよ。ただし、 $BC = 5$

とする。

4. 長さが4である線分 AB の中点を C 、線分 AC を直径とする円に点 B から引いた接線の接点を D とする。次のものを求めよ。

(1) BD の長さ

(2) $AD : CD$

(3) AD 、 CD の長さ

5. 半径が8、5である2つの円の中心間の距離が次のような場合、この2つの円の位置関係と共通接線の本数を答えよ。

(1) 3

(2) 6

(3) 13

(4) 16

(5) 1

6. 半径12の円 O と半径5の円 O' の中心間距離が25であり、この2つの円の共通接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) l と円 O 、円 O' の接点をそれぞれ A 、 B とし、線分 OO' と線分 AB が交点をもたないとき、線分 AB の長さを求めよ。

(2) l と円 O 、円 O' の接点をそれぞれ A 、 B とし、線分 OO' と線分 AB が交点をもつとき、線分 AB の長さを求めよ。

7. 2点で交わる2つの円 O 、 O' について、点 A を円 O と共通接線 AB の接点、点 B を円 O' と共通接線 AB の接点、点 C を円 O と共通接線 CD の接点、点 D を円 O' と共通接線 CD の接点とする。このとき、次のことを証明せよ。

(1) $AB = CD$

(2) P、O、O' は一直線上にある。

8. 点 P と、直線 l 、および l 上の点 Q がある。次のような直線を作図せよ。

(1) 点 P を通り、 l に平行な直線

(2) 点 P を通り、 l に垂直な直線

(3) 点 Q を通り、 l に垂直な直線

9. 線分 AB がある。次の分点を作図せよ。

(1) $5:2$ に内分する点

(2) 中点

(3) $5:2$ に外分する点

(4) $2:5$ に外分する点

10. 長さ a 、 b 、 1 (ただし、 $1 < b < a$) の線分がある。このとき、次の長さをもつ線分を作図せよ。

(1) ab

(2) $a \div b$

(3) $\sqrt{a}$

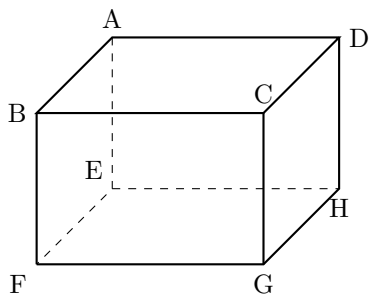
11. $\triangle POQ$ の辺 OQ 上に点 R がある。点 R で辺 OQ に接する円のうち、辺 OP にも接する円を作図せよ。

12. $AB = 1$ 、 $BF = 1$ 、 $AD = \sqrt{3}$ をみたす、下の図の直方体 ABCD-EFGH について、次の直線のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

(1) AB、CG

(2) AB、FH

(3) AF、CH

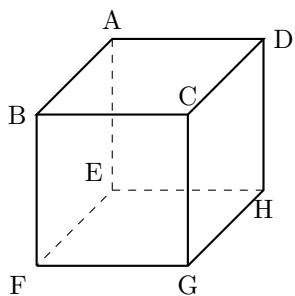


13. 下の図の立方体について、次の問いに答えよ。

(1) 辺 BF と垂直な面、平行な面はどれか答えよ。

(2) 平面 BFHD と平行な辺はどれか答えよ。また、垂直な線分はどれか答えよ。

(3) $FH \perp AE$ 、 $FH \perp AC$ 、 $EC \perp FH$ であることを示せ。



14. 次の多面体の面の数、辺の数、頂点の数を、それぞれ求めよ。また、 $(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2$ が成り立つことを確かめよ。

(1) 四面体

(2) 三角柱

(3) 直方体

(4) 五角錐