

古谷数学教室第 21 回

複素数平面 1

2025 年 10 月 8 日

1 基礎事項

1.1 複素数平面

複素数は 2 つの実数 a, b と虚数単位 i を用いて

$$a + ib$$

の形で表される。以下、複素数 $a + ib$ と書いた場合、文字 a, b は実数を表すものとする¹⁾。

複素数 $a + ib$ に対して、座標平面上の点 (a, b) を対応させると、どんな複素数も座標平面上の点で表すことができる。このように、複素数を点で表す座標平面を**複素数平面**または**複素平面**という²⁾。

複素平面を考える場合、 x 軸を**実軸**、 y 軸を**虚軸**という³⁾。実軸上の点は実数を表し、虚軸上の原点 O 以外の点は純虚数⁴⁾を表す。

複素平面上で複素数 z を表す点 P を $P(z)$ と書く。また、この点を点 z ということがある。たとえば、点 0 とは原点 O のことである。

複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す⁵⁾ $\bar{z}$ を z の**共役複素数**ともいう。

複素平面上で、 $z, \bar{z}, -z$ を表す点を図示すると、次のことがいえる：

点 z と点 $\bar{z}$ は実軸に関して対称である。

点 z と点 $-z$ は原点に対して対称である。

$\bar{\bar{z}}$ の共役複素数は z である。すなわち、 $\bar{\bar{z}} = z$ である。

1) $c + id$ などと同様である。

2) ガウス平面と呼ぶことがある。

3) x 軸が実軸で、 y 軸が虚軸である必要はない (y 軸を実軸、 x 軸を虚軸に見ても問題はない) が、高校数学では、 y 軸が虚軸という縛りがある。私はこの縛りが嫌いである。

4) 複素数 $a + ib$ に対して、 $b \neq 0$ かつ $a = 0$ のとき、この複素数を純虚数という。

5) すなわち、 $z = a + ib$ に対し、 $\bar{z} = a - ib$ である。

複素数平面上の 2 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 間の距離は、座標平面上の場合と同様に線分 AB の長さと考ええる。

原点 O と点 $P(z)$ との距離を、複素数 z の絶対値といい、 $|z|$ で表す。

$z = a + ib$ のとき、 $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから、次のことがいえる：

複素数の絶対値

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

複素数の和、差を複素数平面上で考える。

2 つの複素数

$$\alpha = a + ib, \quad \beta = c + id$$

の和は

$$\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$$

であり、差は

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$$

である。そこで、座標平面上に 4 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\alpha + \beta)$ 、 $D(\alpha - \beta)$ をとると、次のことがいえる：

点 $C(\alpha + \beta)$ は、原点 O を点 $B(\beta)$ に移す平行移動によって点 $A(\alpha)$ が移る点である。

点 $D(\alpha - \beta)$ は、点 $B(\beta)$ を原点 O に移す平行移動によって点 $A(\alpha)$ が移る点である。

実数 k と複素数 $\alpha = a + ib$ について、 $k\alpha = ka + ikb$ である。よって、 $\alpha \neq 0$ のとき、点 $k\alpha$ は 2 点 0 、 α を通る直線 l 上にある。逆に、この直線 l 上の点は、 α の実数倍の複素数を表す。

よって、 $\alpha \neq 0$ のとき、次のことが成り立つ：

$$\text{「3 点 } 0, \alpha, \beta \text{ が一直線上にある」} \iff \text{「}\beta = k\alpha \text{ となる実数 } k \text{ がある」}.$$

複素数 α 、 β について、次のことが成り立つ：

共役複素数の性質

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta},$$

$$\overline{\alpha \beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta},$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

以上から、 n を自然数をするとき、 $\bar{\alpha}^n = (\bar{\alpha})^n$ が成り立つことも理解できる。

複素数 z とその共役な複素数 $\bar{z}$ について、次のことが成り立つ：

$$z + \bar{z} \text{ は実数である}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

1.2 複素数の極形式

複素平面上で、0 でない複素数 $z = a + ib$ を表す点を P とする。線分 OP の長さを r 、変直線 OP を動径とする考えて動径 OP の表す角を θ とすると、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

である。よって、0 でない複素数 z は次の形にも表される：

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

ただし、 $r > 0$ で、 θ は弧度法で表された一般角である。

これを複素数 z の**極形式**という。 $r = |z|$ である。また、角 θ を z の**偏角**といい、 $\arg z$ で表す⁶⁾。偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲や $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲でただ 1 通りに定まる。

z の偏角の 1 つを θ_0 とすると、一般には、整数 n を用いて

$$\arg z = \theta_0 + (2\pi)n$$

である。

$\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき、一般に次のことがいえる：

$$\alpha\beta = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}.$$

以上のことから、複素数の積と商については、次のことが成り立つ：

複素数の積と商の絶対値と偏角

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,$$

$$\arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta,$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|},$$

$$\arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta,$$

ただし、偏角についての等式では、 2π の整数倍の違いは無視して考える。

6) $\arg$ は「偏角」を意味する英語 argument を略したものである。

また、複素数 z と自然数 n に対して、 $|z^n| = |z|^n$ が成り立つ。

絶対値が 1 である複素数 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と複素数 z との積 αz について、その絶対値と偏角は、次のようになる：

$$|\alpha z| = |\alpha||z|,$$

$$\arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z = \arg z + \theta.$$

このことから、次のことがいえる：

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と z に対して、点 αz は、点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。

2 例題

1. $z = 2 - 4i$ とする。点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。
2. $(1 + i)^6$ を計算せよ。
3. 方程式 $z^3 = 8i$ を解け。

3 演習問題

1. $\alpha = 3 + i$, $\beta = x - 3i$, $\gamma = 2 + iy$ とする。4 点 0 , α , β , γ が一直線上にあるとき、実数 x , y の値を求めよ。

2. $\alpha = 1 - i$, $\beta = 2 + 3i$ であるとき、複素数 $3\alpha + 2\beta$ を表す点を図示せよ。

3. 複素数 $3 - 2i$ を表す点と実軸、原点、虚軸に関して対称な点を表す複素数を、それぞれ求めよ。

4. 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $3 + 4i$

(2) $\frac{1 + 3i}{2 - i}$

5. 2 点 $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 1 - 2i$ 間の距離を求めよ。

6. 次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $3 + \sqrt{3}i$

(2) $3i$

7. 2 つの複素数 $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$, $\beta = 1 + i$ について、 $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

8. $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}i$, $\beta = 4 - 3i$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $|\alpha\beta^2|$

(2) $\left| \frac{\beta^2}{\alpha^3} \right|$

9. 点 $z = \sqrt{3} + i$ を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ 回転した点を表す複素数を求めよ。