

古谷数学教室第 22 回

複素数平面 2

2025 年 10 月 15 日

1 基礎事項

1.1 ド・モアブルの定理

n が自然数のとき、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ である。0 でない複素数に対して、 $z^0 = 1$ 、 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ と定めると、整数 n に対して、次のド・モアブルの定理が成り立つ：

ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

複素数 α と正の整数 n に対して、方程式 $z^n = \alpha$ の解を、 α の n 乗根という。0 でない複素数の n 乗根は、 n 個あることが知られている。

一般に、1 の n 乗根は、次の式から得られる n 個の複素数である：

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad z_k = \cos \frac{2\pi \cdot k}{n} + i \sin \frac{2\pi \cdot k}{n}.$$

1.2 複素数と図形

2 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を $C(\gamma)$ 、 $m : n$ に外分する点を $D(\delta)$ とすると、(当然)

$$\gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m + n},$$
$$\delta = \frac{-n\alpha + m\beta}{m - n}$$

が成り立つ。

点 $A(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点を $P(z)$ とする。このとき、

$$AP = r$$

であるから、方程式

$$|z - \alpha| = r$$

を満たす点 z 全体は、点 A を中心とする半径 r の円である。

2 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を $P(z)$ とする。このとき、

$$AP = BP$$

であるから、方程式

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$

を満たす点 z 全体は、線分 AB の垂直二等分線である。

原点 O と 2 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ について、 $\beta = w\alpha$ を満たす複素数 w の偏角が θ であるとする。
 $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$ より、 $\beta = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)\alpha$ であるから、点 B は、点 A を原点を中心として $\arg w = \theta$ だけ回転し、さらに原点からの距離を $|w|$ 倍した点である。

3 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、2 辺の比 $AC : AB$ および $\angle BAC$ の大きさを調べる。点 A を原点 O に移す平行移動によって、点 B 、 C はそれぞれ点 $B'(\beta - \alpha)$ 、 $C'(\gamma - \alpha)$ に移る。このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle OB'C'$ は合同であるから、

$$\frac{AC}{AB} = \frac{OC'}{OB'}, \quad \angle BAC = \angle B'OC'$$

である。よって、 $\gamma - \alpha = w(\beta - \alpha)$ を満たす複素数 $w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を考えると、 $|w| = \frac{|\gamma - \alpha|}{|\beta - \alpha|}$ 、 $\arg w$ から、2 辺の比 $OC' : OB'$ および $\angle B'OC'$ の大きさ、すなわち 2 辺の比 $AC : AB$ および $\angle BAC$ の大きさがわかる。

2 例題

1. 方程式 $2|z| = |z+3|$ を満たす点 z 全体は、どのような図形か答えよ。
2. $w = iz + 2$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか答えよ。
3. $\alpha = 2+i$ 、 $\beta = x+6i$ とする。原点 O と点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ について、 $OA \perp OB$ であるような実数 x の値を求めよ。
4. 3点 $A(1+2i)$ 、 $B(3+i)$ 、 $C(4+3i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

3 演習問題

1. 次の式を計算せよ。

$$(1) \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)^{-3}$$

$$(2) \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right\}^4$$

$$(3) (1+i)^7$$

$$(4) (-\sqrt{3}+i)^{-6}$$

2. ド・モアブルの定理を用いて、次の等式を証明せよ：

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

3. 次の方程式の解を求めよ。

$$(1) z^3 = 8i$$

$$(2) z^2 = -1 - \sqrt{3}i$$

4. 2点 $A(4+2i)$ 、 $B(-1+7i)$ を結ぶ線分 AB に対して、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) $3:2$ に内分する点、 $2:3$ に内分する点¹⁾

(2) 中点

(3) $3:2$ に外分する点、 $2:3$ に外分する点

5. 次の3点 $\alpha = 2+i$ 、 $\beta = 5-i$ 、 $\gamma = -4-4i$ を頂点とする三角形の重心を表す複素数を求めよ。

6. 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か答えよ。

1) (当たり前だが、) 答案にはどっちがどっちを意味するのかわかるように解答すること。

(1) $|z + 2 - 3i| = 1$

(2) $|\bar{z} - i| = 2$

(3) $|z| = |z + 4|$

(4) $|z - 3 + i| = |z + 1|$

(5) $|z + 1| = 2|z - 2|$

(6) $3|z - i| = 2|z - 1|$

7. 点 z が、原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、次の条件を満たす点 w はどのような図形を描くか答えよ。

(1) $w = z + i$

(2) $w = \frac{iz + 4}{2}$

8. $\alpha = 2 - \sqrt{3}i$ 、 $\beta = 6 + \sqrt{3}i$ とする。点 β を点 α を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

9. 複素数平面上の 3 点 $A(\sqrt{3} + i)$ 、 $B(6i)$ 、 $C(3\sqrt{3} + 5i)$ について、 $\angle BAC$ の大きさと $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

10. 複素数平面上の 3 点 $\alpha = 5 - i$ 、 $\beta = 3 + i$ 、 $\gamma = 2 + 2i$ は一直線上にあることを示せ。

11. $\alpha = 2 + i$ 、 $\beta = 4 + 4i$ 、 $\gamma = -1 + 3i$ を表す複素数平面上の点を、それぞれ A 、 B 、 C とする。直線 AB と直線 AC は垂直に交わることを示せ。

4 おまけ

ここでは、受験に役に立てられるレベルの「行列」について簡潔に紹介する。

4.1 行列とは

自然数 $i = 1, 2, \dots, m$ および $j = 1, 2, \dots, n$ に対して、数 a_{ij} が対応しているとする。このとき、 mn 個の数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ を丸括弧や角括弧を用いて長方形状に

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

と並べたものを、 $m \times n$ 行列または m 行 n 列の行列という。行列の行と列の個数の組を型またはサイズといい、式 (1) の行列を (m, n) 型の行列ともいう。また、 a_{ij} の i や j を添字（そえじ）という。

以下、このプリントシリーズでは行列は丸括弧を用いて表すことにする。

例 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

は 2×3 行列である。

式 (1) の行列を A とおいたとき、

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad (2)$$

とも書き、添字の $m \times n$ を省略して、 (a_{ij}) と書くこともある。また、

$$a_{ij}, \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (3)$$

をそれぞれ A の (i, j) 成分、第 i 行、第 j 列という。

なお、行列の第 i 行は成分と成分の間にコンマを入れて、

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (4)$$

のように書くこともある。また、 1×1 行列は、 (a) と表されるが、数 a と同一視し、単に a と書くことが多い。

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ を $m \times n$ 行列、 $B = (b_{kl})_{p \times q}$ を $p \times q$ 行列²⁾ とする。 A と B が同じ型で、対応す

2) 行列の定義から、 k, l, p, q はすべて自然数であることに注意する。

る成分がそれぞれ等しいとき、すなわち、 $m = p$ かつ $n = q$ で、任意の $i = 1, 2, \dots, m$ および $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{ij} = b_{ij}$ が成り立つとき、

$$A = B \quad (5)$$

と記し、 A と B は等しいという。 $A = B$ でないときは

$$A \neq B \quad (6)$$

と記す。

例題 2×3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の $(1, 2)$ 成分、第 1 行、第 3 列をそれぞれ答えよ。

4.2 零行列

すべての成分が 0 の $m \times n$ 行列を $O_{m,n}$ または O と書き、零行列（れいぎょうれつ）という。

例 3 行 2 列の零行列は次のようになる：

$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

4.3 正方行列と特別な例

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ を $n \times n$ 行列とすると、 A を n 次の正方行列または n 次行列、成分 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を A の対角成分という。

正方行列 A が

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (8)$$

を満たすとき³⁾、 A を対角行列という。正方行列 A が

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} \quad (9)$$

を満たすとき、 A をスカラー行列という。正方行列 A が

$$a_{ij} = 0 \quad (i > j) \quad (10)$$

を満たすとき、 A を上三角行列という。正方行列 A が、

$$a_{ij} = 0 \quad (i < j) \quad (11)$$

を満たすとき、 A を下三角行列という。

例題 2 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表す。

3) 「行列 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ について、1 から n のすべての自然数 i, j について、正方行列 A の成分が $a_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$ を満たすとき」と言った方が丁寧ではあるが、すこしくどい。よって、書籍にこのような省略はよくみられる。

1. A の対角成分を答えよ。

2. A が対角行列、スカラー行列、上三角行列、下三角行列になるとき、 A をそれぞれ具体的に表せ。

対角成分がすべて 1 の n 次スカラー行列を E_n または E と書き、 n 次単位行列という。 n 次単位行列は I_n や I と書くこともある。

例 1 次、2 次、3 次の単位行列はそれぞれ

$$E_1 = (1) = 1, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。

4.4 クロネッカーのデルタ

$i, j = 1, 2, \dots, n$ に対して、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (13)$$

により 0 または 1 の値をとる記号 δ_{ij} を定める。 δ_{ij} をクロネッカーのデルタという。

例題 $i, j = 1, 2$ のとき、クロネッカーのデルタ δ_{ij} の値を求めよ。

クロネッカーのデルタを用いると、 n 次単位行列 E_n は、 $E_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ と表すことができる。例えば、2 次単位行列は

$$E_2 = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。

4.5 転置行列

$m \times n$ 行列の A の行と列を入れ替えて得られる $n \times m$ 行列を、 ${}^t A$, A^t または ${}^T A$ などと書き、 A の転置行列という。すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

のとき、

$${}^tA = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

である。定義より、

$${}^t({}^tA) = A \quad (17)$$

が成り立つ。なお、転置行列をつくることを「転置をとる」ともいう。

例題 2×3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めよ。

4.6 対称行列

n 次の正方行列の転置行列は再び n 次の正方行列となる。よって、次のような正方行列を考えることができる。

対称行列の定義

${}^tA = A$ が成り立つ正方行列 A を対称行列という。

例 次の 3 つの正方行列はすべて対称行列である：

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

対称行列の定義により、対称行列について、次の定理が成り立つ：

対称行列についての定理

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ を n 次の正方行列とする。 A が対称行列であるための必要十分条件は

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

である。

4.7 行ベクトルと列ベクトル

$1 \times n$ 行列を n 次の行ベクトル、 $m \times 1$ 行列を m 次の列ベクトルといい、行ベクトル、列ベクトルをあわせて数ベクトルという。

例 2 次、3 次、4 次の行ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \quad (20)$$

と表される。また、2 次、3 次、4 次の列ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (21)$$

と表される。

すべての成分が 0 の数ベクトルを零ベクトルという。零ベクトルは零行列の特別な場合であるが、 $\mathbf{0}$ と書くことが多い⁴⁾。このプリントシリーズでもベクトルと名前のつくものを簡単に書くときはこのように太文字（ボールド体）を用いることにする。

4.8 行列の和とスカラー倍

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ および $B = (b_{ij})_{m \times n}$ をともに $m \times n$ 行列とする。このとき、 A と B の和 $A+B$ を

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \quad (22)$$

により定める。すなわち、 $A+B$ は (i, j) 成分が $a_{ij} + b_{ij}$ の $m \times n$ 行列である。

また、 c をスカラー（数）とし、 A の c によるスカラー倍 cA を

$$cA = (ca_{ij})_{m \times n} \quad (23)$$

により定める。すなわち、 cA は (i, j) 成分が ca_{ij} の $m \times n$ 行列である。

例題 次の計算をせよ：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

行列の和とスカラー倍に関して、次の定理が成り立つ：

4) 高校数学では、 $\vec{0}$ などと書くことが多い。

定理

A, B, C を $m \times n$ 行列、 c, d をスカラーとすると、次の式が成り立つ：

$$A + B = B + A, \quad (25)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (26)$$

$$A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A, \quad (27)$$

$$c(dA) = (cd)A, \quad (28)$$

$$(c + d)A = cA + dA, \quad (29)$$

$$c(A + B) = cA + cB, \quad (30)$$

$$1A = A, \quad (31)$$

$$0A = O_{m,n}. \quad (32)$$

注意 和の結合律（式 (26)）より、 $(A + B) + C$ および $A + (B + C)$ は括弧を省略して、ともに $A + B + C$ と書いても構わない。また、 $m \times n$ 行列 A に対して、

$$A + (-1)A = O_{m,n} \quad (33)$$

が成り立つが、 $(-1)A$ を $-A$ と書く。さらに、 $A + (-B)$ を $A - B$ と書く。これらの注意については、通常の数足し算、引き算と同様である。

4.9 交代行列

ここで、対称行列と対になるものとして、交代行列を定義する：

交代行列の定義

${}^tA = -A$ が成り立つ正方行列 A を交代行列または半対称行列という。

交代行列について、次の定理が成り立つ：

定理

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ を n 次の正方行列とする。 A が交代行列であるための必要十分条件は

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

であり、交代行列の対角成分はすべて 0 である。

証明 交代行列の定義式 ${}^tA = -A$ を成分で表したものが式 (34) となるから、必要十分条件は式

(34) となる。最後の部分については、 A が交代行列のとき、対角成分に注目すると、

$$a_{ii} = -a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (35)$$

で、これを解くと

$$a_{ii} = 0 \quad (36)$$

となるので、示された。■

4.10 行列の積

$A = (a_{ij})_{l \times m}$ を $l \times m$ 行列、 $B = (b_{jk})_{m \times n}$ を $m \times n$ 行列とする。このとき、 A と B の積 AB を

$$AB = (c_{ik})_{l \times n}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}, \quad (i = 1, 2, \dots, l, k = 1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

により定める。すなわち、 AB は (i, k) 成分が c_{ik} の $l \times n$ 行列である。 A の列の個数と B の行の個数が等しいときに積 AB が定義されることに注意する。

例題 次の式を計算せよ。

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

行列の積の基本的な性質として、(積の演算が可能な型の) 単位行列を掛けても変わらないことが挙げられる。すなわち、 A を $m \times n$ 行列とすると、

$$E_m A = A E_n = A \quad (38)$$

である。また、(積の演算が可能な型の) 零行列を掛けたものは零行列となる。

A, B をともに n 次の正方行列とすると、2種類の積 AB および BA はともに n 次の正方行列である。しかし、この2つは必ずしも等しくなるとは限らない。これは通常の数とは大きく異なる性質である。

定義

A, B をともに n 次の正方行列とする。 $AB = BA$ が成り立つとき、 A と B は可換または交換可能であるという。

$AB \neq BA$ であるとき、 A と B は可換ではない。可換でないことを非可換であるともいう。

行列の積に関して、次の定理が成り立つ。なお、以下では和や積を考えるときは、行列の型は演算が可能なものとする。

定理

A, B, C を行列とすると、次の式が成り立つ：

$$(AB)C = A(BC), \quad (39)$$

$$(A + B)C = AC + BC, \quad (40)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (41)$$

$$c \text{ をスカラーとすると、} c(AB) = A(cB) = c(AB). \quad (42)$$

注意 積の結合律（式 (39)）より、 $(AB)C$ および $A(BC)$ は括弧を省略して、ともに ABC と書いても構わない。通常の掛け算と同様である。

次の定理の証明より、スカラー行列は行列の積に関して、スカラー倍と同じ役割を果たすことが分かる。これがスカラー行列という名前の由来である。

定理

任意の n 次のスカラー行列と任意の n 次の正方行列は可換である。

証明 n 次のスカラー行列はスカラー c と n 次の単位行列 E を用いて、 cE と表されることに注意する。また、 A を n 次の正方行列とする。式 (42) より、

$$(cE)A = c(EA) = cA. \quad (43)$$

同様に、

$$A(cE) = c(AE) = cA. \quad (44)$$

よって、 $(cE)A = A(cE)$ が成り立つので、 cE と A は可換である。■

4.11 べき乗

積の結合律（式 (39)）より、正方行列のべき乗を考えることができる。すなわち、 A を正方行列とし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき、 A を n 回掛けたものを A^n と書き、 A の n 乗という。ただし、 $A^0 = E$ と約束する。このとき、通常の数値の掛け算と同様に、指数法則

$$A^m A^n = A^{m+n}, (A^m)^n = A^{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (45)$$

が成り立つ。

通常の数ではべき乗が 0 ならば、もとの数も 0 であるが、行列の場合は必ずしもそうであるとは限らない。

定義

A を正方行列とする。ある自然数 n に対して $A^n = O$ となる時、 A をべき零行列という。

例題 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零行列であることを示せ。

4.12 行列の演算と転置行列

最後に、行列の演算と転置行列の関係について述べておく。次の定理の証明は、行列を成分表示して直接計算することによって示すことができる。

定理

A, B を行列とすると、次の式が成り立つ：

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad (46)$$

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA, \quad (47)$$

$$c \text{ をスカラーとすると、} {}^t(cA) = c {}^tA. \quad (48)$$

4.13 連立 1 次方程式と行列

連立 1 次方程式と行列、およびその分割との関連について簡単に述べておく。まず、連立 1 次方程式は行列を用いて表されることに注意する。例えば、連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad (49)$$

は行列についての等式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (50)$$

と同値である。

より一般に、 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, b_2, \dots, b_m$ を定数とし、 m 個の方程式からなる n 個の未知変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ についての連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (51)$$

を考える。

$m \times n$ 行列 A 、 n 次の列ベクトル $\mathbf{x}$ 、 m 次の列ベクトル $\mathbf{b}$ をそれぞれ

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (52)$$

により定めると、上の連立 1 次方程式は

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (53)$$

と表される。このとき、 A を係数行列という。

4.14 基本変形と掃き出し法

係数行列 A と $\mathbf{b}$ を並べた $m \times (n + 1)$ 行列を $(A|\mathbf{b})$ と書き、拡大係数行列という。これを行列の成分で書くと、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right) \quad (54)$$

と表せる。

連立 1 次方程式は拡大係数行列に対する次の (1) から (3) の変形を行うことにより、解くことができる。

- (1) 1 つの式に 0 でない定数を掛ける。
- (2) 2 つの式を入れ替える。
- (3) 1 つの式に、他の式の 0 でない定数を掛けたものを加える。

この (1) から (3) の変形を行に関する基本変形または初等変形という。また、このようにして連立 1 次方程式を解く方法を掃き出し法またはガウスの消去法という。

例題 式 (49) を拡大係数行列を利用して解け。

4.15 逆行列と正則行列

逆行列、正則行列は次のように定義する：

定義

n 次の正方行列 A に対して、

$$AB = BA = E_n \quad (55)$$

となる n 次の正方行列 B が存在するとき、

$$B = A^{-1} \quad (56)$$

と書き、これを A の逆行列という。このとき、 A は正則または可逆であるといい、 A を正則行列とよぶ。

なお、2 次の正方行列については、次の定理が成り立つことがわかる：

定理

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列が存在するための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ で、このとき、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (57)$$

正方行列の逆行列は必ずしも存在するとは限らないが、存在する場合には、それは一意である：

定理

正方行列の逆行列が存在するならば、それは一意である。

証明 A を n 次の正則行列とし、 B, C をその逆行列とすると、

$$B = BE_n = B(AC) = (BA)C = E_n C = C \quad \blacksquare \quad (58)$$