古谷数学教室第 1 回

数と式

2024 年 3 月 3 日

1　基礎事項

1.1　整式の加法と減法

3、x、$2a$、$(-5)x^2y$ などのように、数や文字およびそれらを掛けただけで作られる式を**単項式**という。単項式では、数の部分をその単項式の**係数**といい、掛けた文字の個数をその単項式の**次数**という。数だけの単項式の次数は 0 であるが、0 の次数は考えない[1]。$5x^2+(-4x)+2$ のように、単項式の和[2]として表される式を**多項式**といい[3]、その 1 つ 1 つの単項式を、この多項式の**項**という。整式の項の中で、文字の部分が同じである項を**同類項**という。整式に含まれる同類項は、係数の和を計算して、1 つの項にまとめることができる。

同類項をまとめた整式において、もっとも次数の高い項の次数を、その整式の次数という。また、次数が n の整式を n 次式という。整式の項の中で、着目した文字を含まない項を**定数項**という。

整式は、ある文字に着目して、各項を次数が低くなる順に並べて整理することが多い。このことを、**降べきの順**に整理する[4]という。

1.2　整式の乗法

a を n 個かけたものを a の n 乗といい、a^n と書く。とくに、$a^1=a$ である。a^n における n を、a^n の**指数**という。また、a、a^2、a^3、$\cdots$ をまとめて a の**累乗**という。

n、m は正の整数[5]とする。このとき、一般には、次の指数法則が成り立つ：

1） 0 の次数は $-\infty$ 次とする考え方もある。多項式には、「m 次の多項式と n 次の多項式を掛けると $m+n$ 次の多項式となる性質」があるが、0 の次数を 0 としてしまうと、上の性質を満たさないからである。

2） 一般には単項式も多項式である。

3） 整式と呼ばれることもある。名前から、整式は係数が整数の多項式だと勘違いする学生さんが非常に多いが、$\sqrt{2}x$ なども整式なので注意が必要である。

4） 各項を次数が高くなる順に並べて整理することもあり、このことを**昇べきの順**に整理するという。

5） 正の整数が分からない場合、1.4 小節を参照。

指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
$$(ab)^n = a^n b^n.$$

整式の積の形をした式について、その積を計算して 1 つの整式に表すことを、その式を**展開**するという。整式の積は、次の分配法則を用いて計算する：

分配法則

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC.$$

次の展開の公式は有名である：

展開の公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$
$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab,$$
$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd.$$

1.3 因数分解

1 つの整式を 1 次以上の整式の積の形に表す[6] ことを、もとの式を**因数分解**するといい、積を作っている各式をもとの式の**因数**という。

1.4 実数

ここでは、**自然数**は次のように定義[7] する：

6) ようするに、展開の逆のようなものである。展開の公式を逆に考えれば、因数分解の公式は得られる。
7) これを「定義」と言うのは少し気が引けるが、高校生のうちはこれで満足することにする。

自然数の定義

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

また、**整数**を、次のように定義する：

整数の定義

自然数、自然数をに -1 をかけた数、0 からなる数。

有理数は、小数を用いて表せる。小数第何位[8]かで終わる小数を**有限小数**といい、小数点以下が限りなく続く小数を**無限小数**という。無限小数のうち、ある位以下では、数字の同じ並びが繰り返される小数を**循環小数**という。

m を整数、n を 0 でない整数とする。このとき、**有理数**を次のように定義する：

有理数の定義

$$\frac{m}{n}.$$

整数以外の有理数は、有限小数か循環小数のいずれかで表される。逆に、有限小数と循環小数は必ず分数で表され、有理数であることが知られている。

整数と、有限小数または無限小数で表される数とを合わせて**実数**という。有理数でない実数もあり、そのような数を**無理数**という。無理数は、循環しない無限小数で表される数であり、分数で表すことはできない。有理数、実数は、それぞれの数の範囲で常に四則計算[9]ができる。

直線上に基準となる点 O をとって数 0 を対応させ、その点の両側に目もりをつけた直線を、**数直線**という。点 O を**原点**という。数直線上では、1 つの実数に 1 つの点が対応している。

数直線上で、実数 a に対応する点 P と原点 O との距離を a の**絶対値**といい、記号 $|a|$ で表す。0 の絶対値は $|0| = 0$ である。

a を 0 以上[10]の実数、b を 0 以下[11]の実数とする。このとき、次のことが成り立つ：

8) 0.1234 は小数第一位に 1、小数第二位に 2、小数第三位に 3、というふうに数える。
9) 加法、減法、乗法、除法をまとめて**四則**といい、四則計算の結果を、それぞれ、和、差、積、商という。ただし、除法において、0 で割ることは考えない。

10) 0 以上は、0 も含む。
11) 0 以下は、0 も含む。

絶対値

$$|a| = a,$$
$$|b| = -b.$$

1.5　根号を含む式の計算

ある数を 2 乗して a になるとき、その数を a の**平方根**という。

正の数 a の平方根は 2 つあり、それらは絶対値が等しく符号が異なる。その正の平方根を $\sqrt{a}$ と書く。負の平方根は $-\sqrt{a}$ である[12)]。

0 の平方根は 0 だけなので、$\sqrt{0} = 0$ である。記号 $\sqrt{\ }$ を**根号**といい、$\sqrt{a}$ を「ルート a[13)]」と読む。a を 0 以上の実数、b を 0 以下の実数とする。このとき、一般に、次のことが言える：

平方根の性質

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a,$$
$$\sqrt{a^2} = a,$$
$$\sqrt{b^2} = -b.$$

a、b を正の実数とする。このとき、平方根の積と商について、次のことが成り立つ：

根号の積と商

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab},$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$
$$\sqrt{b^2 a} = b\sqrt{a}.$$

分母に根号を含む式を、分母に根号を含まない形にすることを、分母を**有理化**するという。

1.6　不等式の性質

x についての方程式を成り立たせる x の値を、その方程式の**解**という。また、方程式のすべての解を求めることを、方程式を**解く**という。

12）記号 $\pm$（プラスマイナスと読む）または $\mp$（マイナスプラスと読む）を用いて a の正の平方根と負の平方根と合わせて $\pm\sqrt{a}$ または $\mp\sqrt{a}$ と書くことがある。これらの記号は**複号**と呼ばれる。

13）スクエアルート a と読むこともある。私はこちらを使うことが多い。

等式には、次の性質がある：

等式の性質

$$A = B$$

ならば

$$\begin{aligned} A + C &= B + C, \\ A - C &= B - C, \\ AC &= BC, \\ \frac{A}{C} &= \frac{B}{C} \quad (\text{ただし、} C \neq 0), \end{aligned}$$

ここで、$C \neq 0$ は C は 0 に等しくないことを意味する。

数量の間の大小関係を不等号を用いて表した式を**不等式**という。不等式で使う文字が表す数は、断りがなければ実数の範囲で考える。

不等式の性質についてまとめると、次のようになる：

不等式の性質

$$A < B$$

ならば

$$\begin{aligned} A + C &< B + C, \\ A - C &< B - C. \end{aligned}$$

$$A < B, \ C > 0$$

ならば

$$AC < BC, \quad \frac{A}{C} < \frac{B}{C}.$$

$$A < B, \ C < 0$$

ならば

$$AC > BC, \quad \frac{A}{C} > \frac{B}{C}.$$

1.7　1 次不等式

x のとるべき値を決める条件を表した不等式を、x についての不等式といい、不等式を成り立たせる x の値を、その不等式の**解**という。x の 1 次式を含めた不等式を、**一次不等式**という。

いくつかの不等式を組み合わせたものを**連立不等式**といい、それらの不等式の解に共通する範囲を、この連立不等式の**解**という。また、連立不等式の解を求めることを、連立不等式を**解く**という。

1.8　絶対値を含む方程式、不等式

$c > 0$ とする。一般に、次のことが言える：

絶対値の公式

$|x| = c$ の解は $x = \pm c$、不等式 $|x| < c$ の解は $-c < x < c$、不等式 $|x| > c$ の解は $x < -c,\ c < x$ である。

2　復習問題

1. 単項式 $8ax^2y^3$ について、次の文字に着目したときの、係数と次数を答えよ。

(1) x

(2) y

(3) x と y

2. 多項式 $2x^2 - 6xy - y^2 - 3x^2 - y^2 + 8xy$ の同類項をまとめよ。また、この多項式は何次式であるか答えよ。

3. 多項式 $5x^2 - 4xy + y^3 + 2xy^3 + y - 5$ について、次の文字に着目すると、それぞれ何次式であるか答えよ。また、そのときの定数項を答えよ。

(1) x

(2) y

(3) x と y

4. 多項式 $x^3 - 3xy + y^3 + 4x - 5y + 1$ を x について降べきの順に整理せよ。また、y について降べきの順に整理せよ。

5. $A = 1 - 3x + 4x^2$、$B = x^2 + 8x - 1$ であるとき、$A + B$ と $A - B$ を計算せよ。

6. $A = 2x^2 - 4x - 5$、$B = 3x^2 - 2x + 2$ であるとき、$2A + B - (4A - 3B)$ を計算せよ。

7. 次の式を計算せよ。

(1) $(-3xy^2)^2 \times (-2x^2y)^3$

(2) $12a^2b\left(\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{ab}{6} - \dfrac{b^2}{4}\right)$

(3) $(2x^2 - 3y)(-4y^2)$

(4) $(t - 1)(t^2 + t)$

(5) $(2x + 1)(3x - 4)$

(6) $(x^2 + 3xy)(y^2 - 2xy)$

8. 次の式を展開せよ。

(1) $(x + 2)^2$

(2) $(4x - 3y)^2$

(3) $(x - 3)(x + 3)$

(4) $(3a - 4b)(3a + 4b)$

(5) $(x - 4)(x - 5)$

(6) $(x + 4)(x - 5)$

(7) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$

(8) $(x-3y)(x+4y)$

(9) $(a-5b)(a+2b)$

(10) $(4x+3y)(2x+5y)$

(11) $(6x-5y)(3x+2y)$

(12) $(x-3y+4)^2$

(13) $(x^2-2x+3)^2$

(14) $(x+3)^2(x-3)^2$

(15) $(x^2+4)(x+2)(x-2)$

(16) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)$

9. 次の式を因数分解せよ。

(1) m^2ab-ma^2b

(2) $2a(a-3b)-b(3b-a)$

(3) $x^2-x+\frac{1}{4}$

(4) $9a^2-12ab+4b^2$

(5) $9x^2-25$

(6) $18x^2-32y^2$

(7) $x^2-(y-1)^2$

(8) $x^2+21x+20$

(9) $x^2+9x+20$

(10) $x^2 - 8x - 20$

(11) $x^2 + 4x + 3$

(12) $x^2 + 8x - 9$

(13) $x^2 - 17xy - 18y^2$

(14) $2x^2 + 13x + 6$

(15) $2x^2 - x - 6$

(16) $2x^2 - 7xy + 6y^2$

(17) $8a^2 - 14ab + 3b^2$

(18) $x^4 - 3x^2 - 28$

(19) $x^4 - 16$

10. 次の分数を小数で表せ。循環小数は $0.\dot{3}$ のような表し方で答えよ。

(1) $\dfrac{3}{20}$

(2) $\dfrac{5}{33}$

11. 次の数を規約分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表せ。ただし、m は整数、n は正の整数であるとする。

(1) -1.24

(2) $0.\dot{2}3\dot{4}$

(3) $0.\dot{1}4\dot{6}$

12. 次の命題は、真の命題か偽の命題か答えよ[14]。偽の命題である場合、反例[15]を1つ答えよ。

(1) 有理数と無理数の和は無理数である。

(2) 無理数と無理数の和は無理数である。

(3) 有理数と無理数の積は無理数である。

(4) 無理数と無理数の積は無理数である。

13. -3、0、7、$\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{5}{4}$、$0.\dot{1}2\dot{3}$、$-\sqrt{3}$、$\sqrt{16}$、$(\sqrt{5})^2$、π を数直線上にとれ。また、この中から、次のものを選び出せ。

(1) 自然数

(2) 整数

(3) 有理数

(4) 無理数

(5) 有限小数で表される数

(6) 循環小数で表される数（ただし、(1)、(2)、(5) は除く）

14. $\sqrt{5}$ の整数部分と小数部分を求めよ。

15. 次の値を求めよ。

(1) $|-6|$

(2) $|\sqrt{2}-2|$

16. 次の2点間距離を求めよ。

---

14) 次の文章は、正しいかどうか答えよ。と読み替えてよい。ここでは簡単に、正しいとき、真の命題といい、間違っているとき、偽の命題ということにする。詳しいお話は、次回の体験授業のときにする。

15) 反例とは、なんでもよいから間違っている例と思えばよい。

(1) A(-2)、B(10)

(2) A(-17)、B(-32)

17. 次の値を求めよ。

(1) 100 の平方根

(2) 10 の平方根

(3) 1 の平方根

(4) 0 の平方根

(5) $\sqrt{7^2}$

(6) $\sqrt{(-7)^2}$

(7) $(\sqrt{7})^2$

(8) $(-\sqrt{7})^2$

18. 次の式を計算せよ。

(1) $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{20}$

(2) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$

(3) $\sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{80}$

(4) $\sqrt{200} - 3\sqrt{18} + \sqrt{50}$

(5) $\sqrt{5}(\sqrt{40} - 4\sqrt{5})$

(6) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

(7) $(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)$

(8) $(4\sqrt{5}-2\sqrt{7})(3\sqrt{5}+4\sqrt{7})$

19. 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{14}{3\sqrt{7}}$

(2) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

20. 1 個 x 円のりんご 8 個を 100 円の箱に詰めたときの合計の値段は、3000 円以下であった。このとき、りんごの値段の大小関係を x の不等式で表せ。

21. $a<b$ のとき、次の 2 つの値の大小関係を、不等号 $>$ または $<$ を用いて $a+1<b+1$ のように表せ。

(1) $a+4$、$b+4$

(2) $a-5$、$b-5$

(3) $7a$、$7b$

(4) $-\dfrac{a}{5}$、$-\dfrac{b}{5}$

(5) $3-4a$、$3-4b$

22. x の値 $x=-2$、$x=3$、$x=5$、$x=6$ のうち、次の不等式の解であるものを選べ。

(1) $x>4$

(2) $2x-3<7$

(3) $4x-1\geq 11$

23. 次の不等式を解け。また、不等式の解を数直線上で表せ。

(1) $3x-2\leq 7-x$

(2) $2(x-2) \geq -3(x+3)$

(3) $\dfrac{x-3}{4} + \dfrac{5}{2} > x$

(4) $0.2x - 1.5 < 0.5x$

(5) $\sqrt{3}x - 1 < \sqrt{5}(x - \sqrt{3})$

24. 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x+1 < 4 \\ x-2 \geq -7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-1 \leq 3 \\ x+1 < -4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-1 > 1 \\ 7 < 1-3x \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+2 < 3x-8 \\ 10x-5(x-2) > 8(x-2)+5 \end{cases}$

(5) $2x-3 < 3x-2 < x+4$

(6) $5 - \dfrac{x}{2} \leq 2x \leq \dfrac{x+10}{3}$

25. ある数 x を 8 倍しても 100 以下であるが、20 倍すると、200 を超えるという。整数 x を求めよ。

26. 方程式 $|x| = 6$ を解け。

27. 次の不等式を解け。

(1) $|x| < 6$

(2) $|x| \geq 6$

28. 方程式 $|3x+1|=5$ を解け。

29. 次の不等式を解け。

(1) $|3x-7|>8$

(2) $|4x+7| \leq 6$