古谷数学教室第 2 回

集合と命題、式と証明

2024 年 3 月 17 日

1　基礎事項

1.1　集合

数学では、「1 から 10 までの自然数の集まり」のように、範囲がはっきりしたもの[1] の集まりを**集合**といい、集合に入っている一つ一つのものを、その集合の**要素**という。例えば、「1 から 10 までの自然数の集まり」を表す集合 A は、次のように表現される：

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 10 \text{を満たす自然数}\ x\}.$$

x が集合 A の要素であるとき、x 集合 A に**属する**といい、

$$x \in A$$

で表し、y が集合 A の要素でないとき、

$$y \notin A$$

で表す。

2 つの集合 A、B について、A のすべての要素が B の要素でもあるとき、A を B の**部分集合**という。このとき、A は B に**含まれる**、または B は A を**含む**といい、

$$A \subset B$$

または

$$A \supset B$$

で表す。集合 A 自身も A の部分集合である。すなわち、

$$A \subset A$$

1)　ここでは、「はっきり」や「もの」については深くは考えない。「なんとなく言いたいことは分かった」で問題はない。

である。また、A と B の要素がすべて一致しているとき、A と B は**等しい**といい、

$$A = B$$

で表す[2]。

要素が一つもない集合を考える。これを**空集合**といい、$\varnothing$ で表す。空集合 $\varnothing$ は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

集合 A、B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい、

$$A \cap B$$

で表す。また、A、B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**といい、

$$A \cup B$$

で表す。

集合を考えるときは、一つの集合 U を決めて、その部分集合について考えることが多い。このとき、U を**全体集合**という。U の部分集合 A に対して、U の要素で、A には属さない要素全体の集合を、U に関する A の**補集合**といい、$\bar{A}$ で表す。

U を全体集合とし、A、B をその部分集合とする。補集合の定義から、次のことが成り立つ：

補集合の性質

$$A \cap \bar{A} = \varnothing,$$
$$A \cup \bar{A} = U,$$
$$\bar{\bar{A}} = A,$$
$$A \subset B \text{ ならば } \bar{A} \supset \bar{B},$$

ただし、$\bar{\bar{A}}$ は $\bar{A}$ の補集合を意味する。また、「ならば」については 1.2 小節で詳しく学習する。

$A \cap B$、$A \cup B$ の補集合について、次の**ド・モルガンの法則**が成り立つ：

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

2） 進んだ学生さんは、「$A \subset B$ かつ $B \subset A$」$\Longleftrightarrow$ A = B であると理解するとよい。

1.2 命題と条件

一般に、正しいか正しくないかが定まる[3] 文や式を**命題**という。また、その命題が正しいとき、その命題は**真**であるといい、正しくないとき、その命題は**偽**であるという。

命題の中には、

「どんな実数 x についても $x^2 \geq 0$ である」

のように、文字を含むものもあり、これは真の命題である。一方、文字 x を含む文や式でも、「x は素数である」、「$x \geq 2$」などは、x に値を代入しないと真の命題か偽の命題かが定まらないから、命題ではない。しかし、たとえば x を自然数全体の集合の要素と指定し、x に 1、2、3 などを代入すると、代入した文や式はそれぞれが真偽の定まる命題になる。このような文字 x を含む文や式を、x に関する**条件**という。条件を考える場合には、条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を、その条件の**全体集合**という。以下では、一つ一つの条件を単に p、q などの文字で表すことにする。

実数について述べた命題「3 より大きければ、1 より大きい」は、実数 x に関する 2 つの条件

$$p : x > 3,$$
$$q : x > 1$$

を用いて、

p ならば q

と表現することができる。このような命題を、

$$p \Longrightarrow q$$

と書く。命題 $p \Longrightarrow q$ について、p を**仮定**、q を**結論**という。実数全体の集合 R の要素のうち、$x > 3$ を満たす x の値全体の集合を P、$x > 1$ を満たす x の値全体の集合を Q とすると、$P \subset Q$ が成り立つ。

一般に、全体集合を U とし、U の要素のうち、条件 p を満たすもの全体の集合を P、条件 q を満たすもの全体の集合を Q とすると、命題 $p \Longrightarrow q$ は「P の要素はすべての Q の要素である」ということを表している。すなわち、$p \Longrightarrow q$ が真ならば、$P \subset Q$ が成り立つ。逆に、$P \subset Q$ が成り立てば、$p \Longrightarrow q$ は真である。

すなわち、条件 p を満たすもの全体の集合を P、条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき、次のようにまとめられる：

3) ここでは、「正しいや正しくないがどのように定まるのか」については深くは考えない。授業で紹介するいくつかの例で「なんとなく言いたいことは分かった」で問題はない。

命題 p ならば q

1. 命題 $p \Longrightarrow q$ は、「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。

2. 「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」とは同じこと[1] である。

1) 進んだ学生さんは、「同値である」、または「必要十分条件である」と訳すとよい。

2 つの条件 p、q を考える。命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき、q は p であるための**必要条件**である、p は q であるための**十分条件**であるという。また、「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」を $p \Longleftrightarrow q$ と書き、p と q は**同値**であるという。また、このとき、q は p であるための**必要十分条件**であるという[4]。

条件 p に対して、「p でない」も条件である。これを p の**否定**といい、$\bar{p}$ で表す。条件 $\bar{p}$ の否定はもとの条件 p である。

全体集合を U とし、U の要素の中で、条件 p を満たすもの全体の集合を P で、条件 q を満たすものの全体の集合を Q で表す。このとき、次のことが成り立つ[5]：

「かつ」の否定、「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q},$$
$$\overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}.$$

1.3　命題とその逆・対偶・裏

命題 $p \Longrightarrow q$ に対して、

$$q \Longrightarrow p$$

を $p \Longrightarrow q$ の**逆**、

$$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$$

を $p \Longrightarrow q$ の**対偶**、

$$\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}$$

を $p \Longrightarrow q$ の**裏**という。一般に、次のことが成り立つ：

4) 同様に、p は q であるための必要十分条件である。

5) 「集合」と「条件」の区別はしっかりとしないといけない。ここで表す「かつ」は $\cap$ を意味しないし、「または」は $\cup$ を意味しない。なぜなら、p、q は条件であり、集合ではないからである。条件「p かつ q」、条件「p または q」はそれぞれ $p \wedge q$、$p \vee q$ で表される。そのように伝えると多少混乱する生徒さんに向けて、「理解するために、自分自身で試行錯誤しながらノートを作成せよ」とコメントを残しておく。私はこのようなことが数学の学習で一番大切であると考えている。

命題とその逆、対偶の真偽

1. もとの命題が真であっても、その逆、裏が真であるとは限らない。

2. 命題とその対偶の真偽は一致する。

1.4　命題と証明

命題とその対偶の真偽は一致するから、次のことがいえる：

対偶を利用する証明

命題 $p \Longrightarrow q$ を証明する[1] のに、その対偶 $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ を証明してもよい。

1)　「命題が真であることを証明する」ことを、単に「命題を証明する」と表現した。一般的に、単に「命題 A」とは、「真の命題 A」を意味するのだが、受験数学では、「次の命題が真であるかどうか証明せよ。」というような問いを問うことがあるため、わざわざ「命題が真であることを証明する」ということが多い。つまり、ある命題 A が「真の命題」か「偽の命題」か明示されていないときは、基本的には命題 A は真であると考えてよい。

また、命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であると結論する方法を**背理法**という。具体的には、次のような手順で命題を証明する：

背理法を利用する証明

1. 命題が成り立たないと仮定する。

2. **1.** の仮定のもとで矛盾を導く。

3. **2.** で矛盾が生じたのは、**1.** の仮定が間違っているからである。

4. したがって、もとの命題が成り立つ。

1.5　分数式とその計算

たとえば、$\dfrac{2}{x}$、$\dfrac{2x+5}{x+1}$ などのように、2 つの整式[6] A、B[7] によって $\dfrac{A}{B}$ の形で表され、B に文字を含む式を、**分数式**という。分数式 $\dfrac{A}{B}$ において、B をその**分母**、A をその**分子**という。分数式では、次のように、その分母と分子に 0 以外の同じ整式をかけても、分母と分子を共通因子で割っても、もとの式と等しい：

6)　多項式と読み換えてもよい。
7)　$B \neq 0$ とする。

分数式の約分

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC},$$
$$\frac{AD}{BD} = \frac{A}{B},$$

ただし、$C \neq 0$ とした。

分数式の分母と分子をその共通因子で割ることを**約分**するという。それ以上約分できない分数式を**既約分数式**[8] という。

分数式の子息計算は、分数の場合と同じように行う：

分数式の四則演算

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD},$$
$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC},$$
$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C},$$
$$\frac{A}{C} - \frac{A}{C} = \frac{A-B}{C}.$$

分母が異なる分数式の加法、減法では、分数式の分母を同じにして計算する。2 つ以上の分数式の分母を同じにすることを**通分**するという。

1.6　恒等式

文字を含む等式において、その両辺の値が存在する限り、含まれている文字にどのような値を代入しても等式が常に成り立つとき、その等式をそれらの文字についての**恒等式**という。

恒等式の両辺が x についての整式のとき、各辺で同類項を整理すると両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。たとえば、次のことが成り立つ：

恒等式の性質

1. 「$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式である」$\Longleftrightarrow$ $a = a'$ かつ $b = b'$ かつ $c = c'$,

2. 「$ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である」$\Longleftrightarrow$ $a = b = c = 0$.

8）「きやくぶんすうしき」と読む。

1.7　等式の証明

等式 $A = B$ を証明するには、たとえば次のような方法がある[9]：

等式の証明

1. A か B の一方を変形して、他方を導く。
2. A と B の両方を変形して、同じ式を導く。
3. $A - B$ を変形して、0 になることを示す。

1.8　不等式の証明

不等式では、とくに断らない限り、文字は実数を表すものとする。

2 つの実数 a、b については、$a > b$、$a = b$、$a < b$ のうち、どれか一つの関係だけが成り立つ。また、実数の大小関係について、次の基本性質が成り立つ[10]：

不等式の性質

$$a > b \text{ かつ } b > c \Longrightarrow a > c,$$
$$a > b \Longrightarrow a + c > b + c,$$
$$a > b \text{ かつ } c > 0 \Longrightarrow ac > bc,$$
$$a > b \text{ かつ } c < 0 \Longrightarrow ac < bc.$$

二つの数 a、b の大小関係と差 $a - b$ について、次のことが成り立つ：

二つの数の大小関係と差

$$a > b \Longleftrightarrow a - b > 0,$$
$$a < b \Longleftrightarrow a - b < 0.$$

これより、不等式 $A > B$ を証明するには、$A - B > 0$ であることを示せばよい。

---

9)　高校生の答案では、$A = B$ から出発して $0 = 0$ などの自明な命題を導き、証明したと主張するものがとても多い。同値変形を明示的に書いていて、なおかつ同値関係が正しく成り立つ場合、この証明方法は（私は）構わないと思うが、この日本語を理解できない学生さんは素直にここに書かれていることを用いて証明する方がよい。

10)　古谷数学教室第 1 回のプリントにも同じようなことを記載したが、ここでは、習ったことを用いて『カッコよく』書き直す。

a、b を実数とする。実数の平方について、次の性質が成り立つ：

実数の平方の性質

$$a^2 \geq 0,$$

ただし、等号が成り立つのは $a = 0$ のときである。

$$a^2 + b^2 \geq 0,$$

ただし、等号が成り立つのは $a = b = 0$ のときである。

$a > 0$、$b > 0$ のとき、

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

において、$a + b > 0$ であるから、$a^2 - b^2$ と $a - b$ の符号は同じである[11]。したがって、$a > 0$、$b > 0$ のとき、次のことが成り立つ：

平方の大小関係

$$a^2 > b^2 \iff a > b,$$
$$a^2 \geq b^2 \iff a \geq b.$$

このことは、$a \geq 0$、$b \geq 0$ のときも成り立つ[1]。

1) $a = 0$、$b = 0$ のときも成り立つことを理解することはとても難しい。興味のある人は、3 節を参照するとよい。

実数の絶対値について、次の性質が成り立つ：

$$|a| \geq 0,$$
$$|a| \geq a,$$
$$|a| \geq -a,$$
$$|a|^2 = a^2,$$
$$|ab| = |a||b|.$$

二つの数 a、b について、$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という。また、$a > 0$、$b > 0$ のとき、$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という。

11) こういう文章に出会ったとき、「ふーん。」と流してしまう学生さんは、数学が得意になる種を一つ逃したと思ってよい。「ほんとかな？」と自分で確かめることがとても大切である。

$a > 0$、$b > 0$ とする。相加平均と相乗平均について、次が成り立つ：

相加平均と相乗平均の大小関係

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

ただし、等号が成り立つのは $a = b$ のときである。

2 復習問題

1. 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) $\{n^2 \mid -1 < n \leq 2,\ n$ は正の整数$\}$

(2) $\{x \mid x$ は 24 の正の約数$\}$

2. 次の集合 $A = \{3n - 1 \mid n = 1,\ 2\}$、$B = \{x \mid (x-2)(x-5) = 0,\ x$ は整数$\}$ の間に成り立つ関係を、記号 $\subset$、$=$、$\supset$ を用いて表せ。

3. $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。集合 $P = \{3,\ 5,\ 9\}$、$Q = \{5,\ 6,\ 7\}$、$R = \{2,\ 4,\ 8\}$、$S = \varnothing$ のうち、集合 A の部分集合であるものはどれか。

4. 集合 $\{p,\ q,\ r,\ s\}$ の部分集合をすべて求めよ。

5. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$、$B = \{2,\ 3,\ 8,\ 10\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $\bar{A}$

(4) $\bar{B}$

(5) $A \cap \bar{B}$

(6) $A \cup \bar{B}$

(7) $\bar{A} \cup \bar{B}$

(8) $\overline{A \cap B}$

6. 次の中から命題を選べ。また、命題についてはその真偽を調べよ。

(1) 1.41 は $\sqrt{2}$ に近い値である。

(2) 1.41 は $\sqrt{2}$ より大きい値である。

(3) 4^2 は 2^4 と等しい値である。

(4) -10^{24} は小さい数である。

7. x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $1 < x < 2 \Longrightarrow 1 < x < 3$

(2) $|x| \leq 2 \Longrightarrow |x-1| < 3$

8. n は自然数とする。命題

「n は偶数」$\Longrightarrow$「n は 4 の倍数」

の真偽を調べよ。偽のときは反例を答えよ。

9. 次の条件を満たす実数 x 全体の集合を求めよ。

(1) $-6 < x < 5$ かつ $2 \leq x \leq 10$

(2) $-8 < x < 1$ または $-4 \leq x \leq 7$

10. a は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $a \geq 5$

(2) $-2 \leq a < 1$

11. x、y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x = 3$ かつ $y = 5$

(2) $x > 4$ または $y \geq 4$

12. x、y、z は実数とする。次の $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ 、 $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを、下の⓪から③のうちから一つ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

(1) 「$x = 5$ かつ $y = 7$」は $x + y = 12$ であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。

(2) $x > 0$ は $x > 1$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。

(3) $x = y$ は $x + z = y + z$ であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが、十分条件ではない

② 十分条件であるが、必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

13. m、x、y は実数とする。次の p は q であるための必要条件か、十分条件か、必要十分条件か、あるいはいずれでもないか。最も適するものを答えよ。

(1) $p : 2x - y = 3$ かつ $x + y = 3$、$q : x = 2$ かつ $y = 1$

(2) $p : mx = my$、$q : x = y$

(3) p : $\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$、$q$: $\triangle\mathrm{ABC} \sim \triangle\mathrm{PQR}$、ただし、$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$ とは[12]、三角形 ABC と三角形 PQR が合同であるという意味[13] である。また、$\triangle\mathrm{ABC} \sim \triangle\mathrm{PQR}$ とは、

12) $\triangle\mathrm{ABC}$ は、3 点 A、B、C を頂点とする三角形を意味している。
13) 2 つの三角形が合同とは、ここでは簡単に「2 つはピッタリ重なる」とでも思えばよい。

三角形 ABC と三角形 PQR が相似であるという意味[14] である。

14. a、b は実数とする。次の条件のうち、互いに同値である組み合わせをすべて選べ[15]。

(1) $ab = 0$

(2) $ab < 0$

(3) $a = 0$ かつ $b = 0$

(4) $a = 0$ または $b = 0$

(5) $a > 0$ かつ $b > 0$

(6) $a < 0$ かつ $b < 0$

(7) $a + b > 0$ かつ $ab > 0$

(8) $a + b < 0$ かつ $ab > 0$

15. x は実数とする。次の命題の逆、対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

(1) $x = 2 \Longrightarrow (x-2)(x-3) = 0$

(2) $(x-2)(x-3) \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2$

(3) $(x-2)(x-3) = 0 \Longrightarrow$「$x = 2$ または $x = 3$」

16. x、y は実数とする。次の命題を証明せよ。

(1) $x + y > 5 \Longrightarrow$「$x > 3$ または $y > 2$」

(2) $y^2 \neq y \Longrightarrow y \neq 1$

14） 2 つの三角形が相似とは、ここでは簡単に「ピッタリ重なるか、拡大縮小の関係にあるかのいずれか」とでも思えばよい。「あれ？小、中学校で習った記号の書き方と違う？」と思う人もいると思うが、記号についてはどちらの書き方でもよい。

15） (1) と (2) が同値である。のような答え方で、考えられるすべての組み合わせのうち、正しい組み合わせをすべて答えよという意味である。

17. $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の数が無理数であることを証明せよ。

(1) $1+\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

18. 次の分数式を約分して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{12a^2b^4c}{16a^3bc^4}$

(2) $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$

(3) $\dfrac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}$

19. 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{ax^2}{14a^3b^2} \times \dfrac{21a^2b}{3x}$

(2) $\dfrac{x^2-x-20}{x^3-2x^2+x} \times \dfrac{x^2-x}{x-5}$

(3) $\dfrac{a^2+a-6}{a^2-a} \times \dfrac{a^2+5a+6}{a^2+2a}$

(4) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

(5) $\dfrac{x+8}{x^2+x-2} + \dfrac{x-4}{x^2-x}$

(6) $\dfrac{x+1}{1-1/(x+2)} + \dfrac{x+3}{1+1/(x+2)}$ ただし、$1/(x+2) = \dfrac{1}{x+2}$ である[16]。

20. 次の等式のうち、恒等式はどれか答えよ。

(1) $(a+3)(a-2) = a^2+a-5$

(2) $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

16） さらに、$1-1/(x+2) = 1-\dfrac{1}{x+2}$ であることに注意せよ。a/b は $a \div b$ と同じ意味で用いられている。

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x(x+2)}$

(4) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

21. 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a、b、c の値を定めよ。

(1) $ax^2+bx=(x-2)(x+2)+c(x+2)^2$

(2) $x^2=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(3) $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$

(4) $\dfrac{4}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

22. 等式 $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ を証明せよ。

23. $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $a^2+ab+b^2=-(ab+bc+ca)$

(2) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=0$

24. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき、等式 $\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ が成り立つことを証明せよ。

25. $x>3$、$y>4$ のとき、不等式 $xy+12>4x+3y$ が成り立つことを証明せよ。

26. 次の不等式を証明せよ。また、(2)、(3)、(4) は等号が成り立つ場合を調べよ。

(1) $a^2+11>6a$

(2) $4a^2\geq 3b(4a-3b)$

(3) $a^2+2ab+2b^2\geq 0$

(4) $2(x^2+3y^2)\geq 5xy$

27. $a>0$、$b>0$ のとき、$\sqrt{9a+16b}<3\sqrt{a}+4\sqrt{b}$ を証明せよ。

28. $a>0$、$b>0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a+\dfrac{9}{a}\geq 6$

(2) $(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 8$

3 おあそび

p、q を命題であるとする。このとき、p の否定を $\bar{p}$、p または q を $p\vee q$、p かつ q を $p\wedge q$、p ならば q を $p\Longrightarrow q$、p と q は同値であることを $p\Longleftrightarrow q$ で表し、それぞれの真偽は表 1 に従う。この表

表 1　真理表

p	q	$\bar{p}$	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Longrightarrow q$	$p\Longleftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

の見方は、T は真のを意味し、F は偽を意味する。たとえば命題 p と命題 q が共に真であるとき、命題 $p\wedge q$ が真であるということを意味している。より具体的には、命題

$$0>0\Longrightarrow 0>0$$

は真の命題である[17]。なぜなら、$0 > 0$ は偽の命題であるからである[18]。

$P(x)$ を x の条件であるとする。「すべての x に対して、$P(x)$ が成り立つ。」のような主張を

$$\forall x,\ P(x)$$

と表記し、このような主張を「全称」という。「ある x に対して、$P(x)$ が成り立つ。」のような主張を

$$\exists x,\ P(x)$$

と表記し、このような主張を「存在」という。

等式は、「恒等式」と「方程式」があり、これら 2 つは区別できるようにならないといけない。x についての多項式（整式）$P(x)$ とし、

$$\forall x,\ P(x) = 0$$

を恒等式といい、

$$\exists x,\ P(x) = 0$$

を方程式という。

17） 「直感と反する！」という学生さんはとても多いことは予想できる。そのような学生さんには、「君の直感と数学の定義がズレているだけに過ぎない」と言いたいが、私は先生という立場なので、以下に例をあげて理解を手助けすることにする。

p :「足手まといになる」、q :「旅に連れて行かない」とする。(「先生！これは命題ではありません！」などという生徒さんはとてもよい捻くれものである。そのような学生さんには例題などによる理解は不要であろう。）このとき、真理表によれば、「足手まといになる」ならば「旅に連れて行かない」は真である。「足手まといになる」ならば「旅に連れて行く」は偽である。「足でまといにならない」ならば「旅に連れて行かない」は真である。「足手まといにならない」ならば「旅に連れて行く」は真である。つまり、「足手まといになるから旅に連れて行けない」と発言した方（ここではフリーレンと名付ける）が嘘つきになるのは、「足手まといになるから旅に連れて行く」場合のみである。フリーレンに「足手まといにならないから旅に連れて行ってくれ」とお願いしても、「$\cdots$ 謀（はか）ったな」とは発言せずに「足手まといにならないけど旅には連れて行かない」と言い返される可能性はある。なぜなら彼女（フリーレンは女性であるとする。）は決して嘘はついていないからだ。

同様に、「お菓子をくれないといたずらしちゃうぞ」と発言したおばけにお菓子をあげてもいたずらされる可能性があり、「動くな！動くと撃つぞ！」と言われたら「動かなくても撃たれる」可能性があり、「正直に言わないと怒るよ」と言われたら「正直に言っても怒られる」可能性があることを考慮しなければならない。これらの発言者は、決して嘘をついていない。

18） 命題 p ならば命題 q の「ならば」の記号は $\Longrightarrow$ ではなく、$\longrightarrow$ と書き、区別をする書籍もある。初学者には混乱を招くので、ここでは、統一して $\Longrightarrow$ を用いる。ここらのお話に興味がある学生さんには、ちゃんと授業をすることにするが、覚悟が必要である。