古谷数学教室第 3 回

場合の数と確率、式と証明

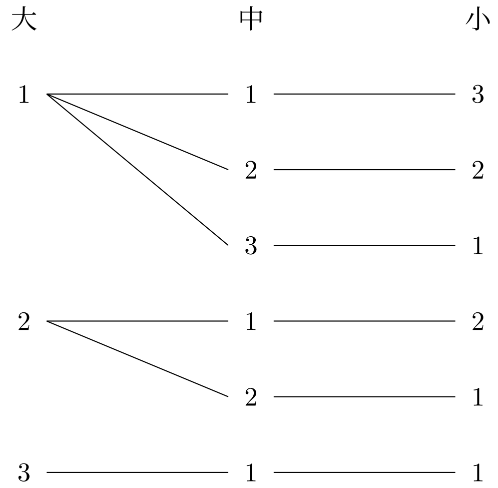
2024 年 3 月 31 日

1　基礎事項

1.1　場合の数

　ある事象が起こる場合の数を知るには、すべての場合をもれなくかつ重複もなく数える必要がある。ここでは、そのような数え上げの方法について考える。

　例えば、大中小の 3 個のさいころを投げるとき、目の和が 5 になる場合を考える。下の図を**樹形図**といい、起こりうるすべての場合を、もれなくかつ重複なく数え上げるのに便利である。



　一般に、次の法則が成り立つ：

和の法則

2 つの事柄 A と B の起こり方に重複はないとする。A の起こり方が a 通りあり、B の起こり方が b 通りあれば、A または B の起こる場合は、$a+b$ 通りある。

積の法則

事柄 A の起こり方が a 通りあり、そのどの場合に対しても事柄 B の起こり方が b 通りあれば、A が起こり、そして B が起こる場合は、$a \times b$ 通りある。

1.2　順列

いくつかのものの中からその一部を取り出して 1 列に並べるとき、並べ方の総数について考える。

例えば、4 個の文字 a、b、c、d のうち異なる 3 個を取って、1 列に並べるとき、このような並びは何通りあるかを考える。積の法則を利用すれば、$4 \times 3 \times 2 = 24$、すなわち 24 通りであることが理解できる。このように、いくつかのものを順に 1 列に並べるとき、その並びの 1 つ 1 つを**順列**という。

一般に、異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を n 個から r 個取る順列といい[1]、その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す[2]。ただし、$r \leq n$ である。

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ についても、積の法則を使って求めると、次のような結果が得られる[3]：

順列の総数

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

1 から n までの自然数の積を n の**階乗**といい、$n!$ で表す：

$${}_n\mathrm{P}_n = n!.$$

ものを円形に並べる順列を**円順列**という。円順列では、適当に回転して並びが同じになれば同じ

1)　これは教科書的な言い回しである。正直に言うと、私はこの考え方は好きではない。私は、「たまたま ${}_n\mathrm{P}_r$ の演算結果が異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を n 個から r 個取る順列の総数に対応する」と考える。つまり、${}_n\mathrm{P}_r$ の定義が先に与えられた考え方である。

2)　順列は英語で permutation という。

3)　前の注でも言ったが、定義がこれで、この定義ならば順列の考え方に対応すると考える方が好みである。なんなら、順列の定義はもっとスマートに表現できる。

　結果をみて「へー。」では決して賢くはならない。なぜ最後が $n-r+1$ になるのかきちんと説明できないならば、面倒であるがなぜか考える必要がある。「なぜか考えたから、理解できた。」は大切であることは多くの学生さんが納得するが、「なぜか考えたけど分からなかった。」も大切であることがなぜか多くの学生さんが納得いかないらしい。「考えても分からないかもしれないから、考えるだけ時間の無駄だ。」と考えることを放棄している学生さんが賢いはずがないと、ここではっきりと断言しておく。（対偶をとると、賢い学生さんは「分からなくても考える」ことを怠らない。）

　「なぜ分からなかったとしても考える時間を設けることが大切なのか説明しろ。」という学生さんがいるかもしれないので、簡単に説明しよう。数学は頭を使うゲームだと思えばよい。例えば詰将棋は、勝ちの手順が用意されているため、みなさんがやっている数学の問題に対応する。たくさん詰将棋の問題を解いている人は、たとえ問題がほとんど解けなくても頭を使うだろう。では、A さんを 2 人用意する。普通はできないが、仮想の空間では可能である。3 年間詰将棋を解いたけど、解けた問題は半分くらいである A さんと、3 年間ほとんど詰将棋を解いたことがない A さんと、どちらが将棋が強いかを考えれば、分からなくても考えることがいかに大切か理解できるであろう。

順列とみなす[4]。異なる n 個の円順列の総数については、次のことが言える：

円順列の総数

異なる n 個の円順列の総数は $(n-1)!$ 通りである[1]。

1） これも、（分からなかったとしても）なぜ成り立つのか考えること。ただ単に覚えるのは確かに楽だが、勉強は楽なものだと勘違いしてはいけない。

異なる n 個のものから重複を許して r 個取って並べる順列を、n 個から r 個取る**重複順列**という。重複順列では、$r \leq n$ とは限らず、$r > n$ であってもよい。重複順列の総数については、次のことが言える：

重複順列の総数

n 個から r 個取る重複順列の総数は n^r 通り。

1.3 組み合わせ

いくつかのものの中からその一部を取り出して組を作るとき、その組の総数を調べてみる。

例えば、4 個の文字 a、b、c、d から、異なる 3 個を取り出して文字の組を作るとき、次のような 4 つの組みが作れる：

$$\{a,\ b,\ c\},\ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\}.$$

このように、ものを取り出す順序を無視した組を作るとき、これらの組の 1 つ 1 つを**組合わせ**という。

一般に、異なる n 個のものから異なる r 個取り出して作る組み合わせを n 個から r 個取る組み合わせといい、その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す[5]。ただし、$r \leq n$ である。例えば、$\{a,\ b,\ c\}$ の順列の総数は $3!$ 通りである。$\{a,\ b,\ d\}$、$\{a,\ c,\ d\}$、$\{b,\ c,\ d\}$ についても同様である。したがって、${}_n\mathrm{C}_r$ は次の式で表されることが理解できる：

組み合わせの総数

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}.$$

一般に、n 個から r 個取る組み合わせの総数は、n 個から $(n-r)$ 個取る組み合わせの総数に等しい：

4） 適当な回転は、2 次元的な回転に対して言っている。3 次元的な回転も許す順列は普通、数珠順列などと呼ばれて区別される。
5） 組み合わせは英語で combination という。

組み合わせの性質

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}. $$

1.4　事象と確率

「さいころを投げる」とか「番号札を引く」などのように、同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を**試行**という。また、試行の結果として起こる事柄を**事象**という。

1 個のさいころ[6)]を投げる試行では、例えば 1 の目が出ることを、単に 1 で表すと、試行の結果全体は、次の集合 U で表すことができる：

$$ U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}. $$

このとき、「奇数の目が出る」という事象 A は、U の部分集合

$$ A = \{1,\ 3,\ 5\} $$

で表される。このように、1 つの試行において、起こりうる結果全体を集合 U で表すとき、その試行におけるどの事象も、U の部分集合で表すことができる。U 自身で表される事象を、**全事象**、U のただ 1 つの要素からなる集合で表される事象を**根元事象**という。例えば、1 個のさいころを投げる試行の根元事象は、次の 6 個である：

$$ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}. $$

1 個のさいころを投げる試行では、どの目がでることも同程度に期待できると考える。一般に、ある試行において、どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき、これらの根元事象は**同様に確からしい**という[7)]。このような試行で、起こりうるすべての場合の数を N、事象 A の場合の数を a とするとき、$\dfrac{a}{N}$ を事象 A の**確率**といい、$P(A)$ で表す。

以下、このプリントで取り上げる試行では、全事象 U におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする。

1.5　確率の基本性質

集合を使って、確率の基本性質を明らかにする。確率の基本性質を調べる前に、事象 A、B に対して、次のような事象を定義しておく：$A \cap B$ は「A と B がともに起こる事象」を意味し、$A \cup B$ は「A または B が起こる事象」を意味する。

---

6)　ここで言うさいころとは、1 の目、2 の目、3 の目、4 の目、5 の目、6 の目を 1 つずつもつ 6 面体を意味する。

7)　「古谷の血液型が A 型である確率は 1/4 である。」、「古谷が結婚してる確率は 1/2 である。」、「1/100 の確率で当たりとは、100 回引けば必ず 1 回当たりを引けるという意味である。」などは、正しいかを考えてほしい。実は、これはすべて間違いである。よくある確率の勘違いである。根元事象が同様に確からしいとは、どう言うことなのかしっかり考えることをすると、スッキリするだろう。

2 つの事象 A、B が決して同時に起こらないこともある。このとき、A、B は互いに**排反**である、または A、B は互いに**排反事象**であるという。A と B が互いに排反であることは、$A \cap B = \varnothing$ で表される。空集合 $\varnothing$ で表される事象を**空事象**という。

確率には、次の有名な性質がある：

確率の基本性質

1. どのような事象 A についても、

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

2. 空集合 $\varnothing$ について、

$$P(\varnothing) = 0,$$

全事象 U について、

$$P(U) = 1,$$

3. 事象 A、B が互いに排反であるとき、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

証明　1 つの試行における全事象 U の要素の個数 $n(U)$ と U の部分集合に相当する事象 A の要素の個数 $n(A)$ について、

$$0 \leq n(A) \leq n(U)$$

なので、$n(U) \neq 0$ とし各辺を $n(U)$ で割ると

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

である。また、$\dfrac{n(U)}{n(U)} = 1$ なので、$P(U) = 1$ であり、$n(\varnothing) = 0$ なので、$P(\varnothing) = 0$ である。

全事象を U とする。事象 A に対して、「A が起こらない」という事象を、A の**余事象**といい、$\bar{A}$ で表す。A と $\bar{A}$ は互いに排反であるため、$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ となり、さらに $P(A \cup \bar{A}) = P(U) = 1$ となるため、次のことが成り立つ：

余事象と確率

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

1.6　独立な試行と確率

これまでは、1 つの試行における事象の確率を考えてきた。ここでは、複数の試行を行ったときの確率を考える。

例えば、A、B の 2 人がさいころを投げるとする。このとき、A がさいころを投げる試行と、B がさいころを投げる試行では、それぞれの結果は互いに影響を及ぼさない。このように、いくつかの試行において、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、これらの試行は**独立**であるという。

2 つの試行 S と T が独立であるとき、S で事象 A が起こり、かつ T で事象 B が起こる確率 p とする。一般に、独立な 2 つの試行における事象の確率について、次のことが成り立つ：

独立な試行の確率

$$p = P(A) \times P(B).$$

独立な 3 つ以上の試行についても、同様である。

1 個のさいころを何回か繰り返し投げる場合のように、同じ条件のもとで試行の繰り返しを**反復試行**という。1 つの試行を何回か繰り返すとき、これらの試行は独立である。

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回行う反復試行について、一般に次のことが成り立つ[8]：

反復試行の確率

$${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}.$$

1.7　条件付き確率

1 つの試行における 2 つの事象 A、B について、事象 A が起こったとして、そのときに事象 B が起こる確率を、A が起こったときの B が起こる**条件付き確率**といい、$P_A(B)$ で表す。

全事象を U とする。2 つの事象 A、B について、条件付き確率 $P_A(B)$ は、次の式で定義される[9]：

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}.$$

明らかに、次のことが成り立つ：

8)　この公式を丸暗記しようなんて、とんでもない。何度も言うように、確かに成り立つことを自分自身で考えること。

9)　定義は数学で唯一覚えなければならないものである。しかし、丸暗記では全く役に立たない。「式を読む」ということを心がけよう。つまり、「数式を日本語でどういう意味か説明する」ということである。「条件付き確率が苦手です。意味が分からない。」などの感想をお持ちの生徒さんは、「数式を日本語でどういう意味かを説明する」が全くできていないのだろう。

乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

1.8　期待値

変数 X の取り得る値を x_1、x_2、$\cdots$、x_n とし、X がこれらの値をとる確率を、それぞれ p_1、p_2、$\cdots$、p_n とすると、X の**期待値** E は、次の式で与えられる：

$$E = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n,$$

ただし、

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

1.9　3 次式の展開と因数分解

次の 3 次式の展開は有名である：

展開の公式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

1.10　二項定理

次の**二項定理**も有名である[10)]：

10)　何度もくどいほど出てくるこの注でも、丸暗記の無意味さを強調しておく。「これは（丸暗記で）覚えよう。」と教えている先生を観測したことがあるが、私たちとは住む世界が違うので、無視でよい。住む世界が違う先生を観測したとき、どのような状況でこの程度の公式の丸暗記が役に立つのかを必死に考えたが、全く思いつかなかった。

浜辺美波さん、永野芽郁さん、広瀬すずさんが、それぞれチョコ A とチョコ B を持っているとする。この 3 人から 1 つずつチョコレートをもらうとき、チョコ A を 2 つ、チョコ B を 1 つ受け取る受け取り方は全部で何通りか。もちろん、浜辺美波さん、永野芽郁さん、広瀬すずさんは区別できる。そのため、同じチョコ A でも、浜辺美波さんからもらったチョコ A と永野芽郁さんからもらったチョコ A は区別するものとする。これは、チョコ A を手作りチョコと言い換えて、チョコ B を購入チョコと読み換えても、求める場合の数は変わらない。この例題でも、二項定理と同様に考えることができて、${}_3\mathrm{C}_1$ 通りである。「二項定理と同様？」と思う学生さん向けに解説をする。チョコ A は a に、チョコ B は b、に対応、そして、人物はそれぞれ $(a + b)$ に対応する。そうすると、$(a + b)^3$ の展開を考えるとき、$(a + b)$ の項（人）から a または b の単項式（A または B のチョコ）をそれぞれかける項を全部書き出す（受け取る受け取り方をすべて書き出す）ことに対応する。

さて、ここで「区別するときは ${}_n\mathrm{P}_r$、区別しないときは ${}_n\mathrm{C}_r$ と覚えましょう。」と、とても分かりやすい覚え方を教わった方に、なぜ人物（浜辺美波さんなど）は区別して、$(a + b)$ は区別できないのに、同じ式になるのかと質問をする。この質問を受け取った方は、「区別するときは ${}_n\mathrm{P}_r$、区別しないときは ${}_n\mathrm{C}_r$ と覚えましょう。」の、とても分か

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n b^0 + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n a^0 b^n.$$

1.11　整式の割り算

A、B が同じ 1 つの文字についての整式[11] で、B は 0 でないとする。このとき、A を B で割った商と余りを求めるとは、次の等式を満たす整式 Q、R を求めることである：

$$A = BQ + R,$$

ただし、R は 0 か、B より次数の低い整式である。A、B に対して、Q、R は 1 通りに定まり、Q を**商**、R を**余り**という。とくに、$R = 0$ のとき、A は B で**割り切れる**という。

2　復習問題

1. 1 から 100 までの整数のうち、次のような数は何個あるか答えよ。

(1) 6 で割り切れない数

(2) 4 と 6 の少なくとも一方で割り切れる数

2. 1 から 1000 までの整数のうち、次のような数は何個あるか答えよ。

(1) 3 の倍数

(2) 5 の倍数

(3) 3 の倍数かつ 5 の倍数

(4) 3 の倍数または 5 の倍数

りやすい覚え方が、とてもひどい嘘つきで役に立たないことを理解するだろう。(本当は、役に立たないこの覚え方の解釈でもこの例題を乗り越えられるのだが、普通の人間にとって混乱を招くだけにすぎず、やはり意味を理解して combination と permutation を使いたいところである。もう少し言うと、私は combination と permutation は使い分けるものだと思っていない。どちらを用いても解答できる。なぜなら、combinaiton を用いた解答を作っても、階乗をかけるのなら permutation と同じ意味になるからである。はじめから permutaion を用いて解答するのか、combination を用いて、後で階乗をかけるか、どちらでも同じことである。)

11)　文字の種類が 2 つのときは、どちらかの文字についての整式とみて割り算を行うこともある。3 つ以上も同様である。

(5) 3 の倍数でない数

(6) 3 の倍数でなく 5 の倍数でもない数

(7) 3 の倍数であるが 5 の倍数でない数

3. 60 人に数学と英語の試験を行った。数学、英語の合格者がそれぞれ 30 人、50 人で、2 科目とも不合格の人は 8 人であった。次の人は何人か答えよ。

(1) 2 科目とも合格した人

(2) 数学だけ合格した人

4. 単語 door を構成してる文字から 3 文字を選んで 1 列に並べる方法は、何通りあるか答えよ。

5. 大小 2 個のさいころの目の和が次のようになる場合は、何通りあるか答えよ。

(1) 8 または 10

(2) 6 の倍数

(3) 9 以上の数

6. 8 種類の数学の本と 4 種類の国語の本の中から、それぞれ 1 冊ずつ選んで、計 2 冊の組を作る方法は何通りあるか答えよ。

7. 式 $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開すると、項は何個できるか答えよ。

8. 次の値を求めよ。ただし、n は 2 以上の自然数とする。

(1) ${}_7\mathrm{P}_3$

(2) ${}_7\mathrm{P}_7$

(3) ${}_7\mathrm{P}_0$

(4) $7!$

(5) ${}_n\mathrm{P}_2$

9. 次のものの総数を求めよ。

(1) 5 人の生徒の中から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並べ方

(2) 1 から 7 までの 7 個の数字から異なる 5 個を選んで作る 5 桁の整数

(3) magic という単語の 5 個の文字全部を使ってできる文字列

10. 次の方法は何通りあるか答えよ。

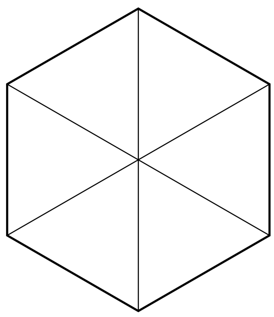
(1) 番号のついた 3 脚のいすに、8 人の生徒のうち 3 人が座る方法

(2) 番号のついた 8 脚のいすに、3 人の生徒が座る方法

11. 次のような方法は何通りあるか答えよ。

(1) 8 人が手をつないで輪を作る方法

(2) 下の図のように 6 等分した正六角形の各部分を、異なる 6 色の絵の具をすべて使って塗り分ける方法



12. 5 人が 1 回じゃんけんをするとき、手の出し方は何通りあるか答えよ。

13. 6 個の要素をもつ集合 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ の部分集合の個数を求めよ。

14. 次の値を求めよ。ただし、n は 3 以上の自然数とする。

(1) ${}_4\mathrm{C}_2$

(2) ${}_8\mathrm{C}_8$

(3) ${}_5\mathrm{C}_0$

(4) ${}_9\mathrm{C}_7$

15. 異なる 7 個のあめ玉から 3 個を選ぶ方法は、何通りあるか答えよ。

16. 10 人の生徒の中から 4 人の委員を選ぶ方法は、何通りあるか答えよ。

17. 硬貨 1 枚を 10 回投げるとき、3 回だけ表が出る場合は何通りあるか答えよ。

18. 正十角形について、次の数を求めよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 4 個の頂点を結んでできる四角形の個数

(3) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(4) 対角線の本数

19. 1 年生 4 人、2 年生 6 人の中から 4 人の委員を選ぶとき、1 年生の委員 2 人と 2 年生の委員 2 人を選ぶ方法は何通りあるか答えよ。

20. HOKKAIDO の 8 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか答えよ。

21. 黒玉 2 個、白玉 4 個が入っている袋がある。次の事象を集合で表せ。

(1) 玉を 2 個同時に取り出す試行において、その全事象

(2) (1) の試行において、少なくとも 1 個黒玉が出るという事象

22. 1 から 15 までの（自然数の）番号をつけた 15 枚のカードから 1 枚を取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) 4 以下の番号が出る確率

(2) 5 の倍数の番号が出る確率

23. 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき、次のような玉が出る確率を求めよ。

(1) 赤玉 2 個と白玉 1 個

(2) 白玉 3 個

24. 1 個のさいころを投げるとき、A から D の 4 つの事象を以下のように定める：

$$A : \text{偶数の目が出る},$$
$$B : 3 \text{ の倍数の目が出る},$$
$$C : \text{奇数の目が出る},$$
$$D : 5 \text{ の約数の目が出る}.$$

次の問いに答えよ。

(1) 積事象 $A \cap B$ の確率を求めよ。

(2) 和事象 $A \cup B$ の確率を求めよ。

(3) A から D の 4 つの事象のうち、互いに排反であるものはどれとどれか答えよ。

25. 赤玉 4 個、白玉 5 個が入っている袋から、3 個の玉を同時に取り出すとき、白玉が 2 個以上である確率を求めよ。

26. 1 から 100 までの（自然数の）番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) 5 の倍数の番号が出る確率

(2) 8 の倍数の番号が出る確率

(3) 5 の倍数または 8 の倍数の番号が出る確率

27. A 班 6 人、B 班 8 人からくじ引きで委員を 3 人選ぶとき、少なくとも B 班から 1 人選ばれる確率を求めよ。

28. 1 個のさいころを 2 回投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) すべて 2 以下の目が出る確率

(2) 1 回目に 4、2 回目に 3 の倍数の目が出る確率

29. 袋 A には白玉 7 個、赤玉 4 個、袋 B には白玉 6 個、赤玉 5 個が入っている。袋 A から 1 個、袋 B から 2 個の玉を同時に取り出すとき、3 個とも白玉である確率を求めよ。

30. 白玉 2 個、黒玉 3 個が入っている袋から 1 個の玉を取り出し、色を調べてからもとに戻すことを 3 回行うとき、3 回目に初めて白玉が出る確率を求めよ。

31. 袋の中に赤玉 6 個、白玉 4 個が入っている。この袋から玉を 1 個取り出し、これをもとに戻してから、さらに玉を 1 個取り出すとき、2 回続けて同じ色の玉が出る確率を求めよ。

32. 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) 2 の目がちょうど 2 回出る確率

(2) 3 の倍数の目がちょうど 1 回出る確率

33. 1 枚の硬貨を 6 回続けて投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) 1 回目、3 回目、6 回目の 3 度だけ表が出る確率

(2) 3 度目の表が 6 回目に出る確率

34. 赤玉 2 個、白玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し、色を調べてからもとに戻す。この試行を 5 回続けて行うとき、4 回以上赤玉が出る確率を求めよ。

35. 1 枚の硬貨を 7 回続けて投げるとき、少なくとも 2 回表が出る確率を求めよ。

36. 血液型が A 型、B 型である 100 人を調べると、男子 50 人、女子 50 人で、A 型は男子 30 人、女子 25 人であった。次の確率を求めよ。

(1) 選ばれた 1 人が女子のとき、その人が A 型である確率

(2) 選ばれた 1 人が B 型のとき、その人が男子である確率

37. 当たりくじ 4 本を含む 20 本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないで、A、B が 2 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。次の確率を求めよ。

(1) A、B が 2 人とも当たる確率

(2) A が当たり、B がはずれる確率

38. ある試行における事象 A、B について、$P(A \cap B) = 0.2$、$P(A) = 0.4$、$P(B) = 0.5$、$P_A(B)$、$P_B(A)$ を求めよ。

39. 2 個のさいころを同時に投げるとき、出る目の差の絶対値の期待値を求めよ。

40. 白玉 4 個、赤玉 3 個が入っている袋から 1 個の玉を取り出し、色を調べてからもとに戻すという試行を 3 回続けて行うとき、赤玉の出る回数の期待値を求めよ。

41. 次の式を展開せよ。

(1) $(a+2)^3$

(2) $(2a-b)^3$

(3) $(x+4)(x^2-4x+16)$

(4) $(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$

(5) $(x+2y)^2(x^2-2xy+4y^2)^2$

42. 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+27

(2) $8a^3-27b^3$

(3) $64x^6-y^6$

43. 次の式の展開式を求めよ。

(1) $(x+1)^6$

(2) $(a-b)^6$

(3) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^5$

44. 式 $(3x-2)^5$ の展開式における、x^3 の項の係数を求めよ。

45. n は自然数とする。等式

$$ {}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n $$

が成り立つことを証明せよ。

46. 次の多項式 A、B について、A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A=4x^3+4x^2+3x+2$、$B=2x+1$

(2) $A=2x^3-3x-10$、$B=2x^2+4x+5$

47. 次の多項式 $A=x^3-x^2+3x-3$、$B=x-3$ について、A を B で割った商 Q と余り R を求めよ。また、その結果を $A=BQ+R$ の形に表せ。

48. 次の条件を満たす多項式 A、B を求めよ。

(1) A を x^2-2x-1 で割ると、商が $2x-3$、余りが $-2x$

(2) $6x^4+7x^3-9x^2-x+3$ を B で割ると、商が $2x^2+x-3$、余りが $6x$

3　おあそび

順列、組み合わせについては、次のように定義するとスッキリする。自然数 n について、$n!$ 階乗を次のように定義する：

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k,$$

ただし、$\prod_{k=1}^{n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ である。さらに、$0!$ を次のように定義する：

$$0! = 1.$$

n、r は $0 \leq r \leq n$ を満たす 0 以上の整数であるとする。このとき、順列 ${}_n\mathrm{P}_r$、組み合わせ ${}_n\mathrm{C}_r$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= \frac{n!}{(n-r)!}, \\ {}_n\mathrm{C}_r &= \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}. \end{aligned}$$