

古谷数学教室第 4 回

2 次関数、複素数と方程式

2024 年 4 月 7 日

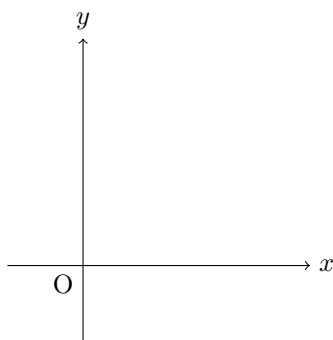
1 基礎事項

1.1 関数とグラフ

2 つの変数 x 、 y について、 x の値が 1 つ決まると、それにもなって y の値がただ 1 つ決まるとき、 y は x の関数であるという。また、その変数 x の取りうる値をの範囲を、その関数の定義域という。

y が x の 1 次式で表されるとき、 y は x の 1 次関数であるといい、 y が x の 2 次式で表されるとき、 y は x の 2 次関数であるという¹⁾。 y が x の関数であるとき、 y を表す x の式を $f(x)$ などのように書くことがある²⁾。 x の関数 $y = f(x)$ を単に関数 $f(x)$ ともいう。定義域における数 a について、 $x = a$ のときの関数 $f(x)$ の値を $f(a)$ で表す。

平面上に、下図のような点 O で垂直に交わる 2 本の数直線を取り、それらを x 軸、 y 軸とする。点 O を原点といい、 x 軸と y 軸を座標軸という。



この平面上の点 P はの位置は、2 つの実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点 P の座標と

1) $y = 2x + 3$ などは、1 次関数で、 $y = 3x^2 + 2x$ などは、2 次関数である。

2) 表し方は、 $g(x)$ でも、 $h(x)$ などでもよい。関数は英語で function というので、その頭文字をとって $f(x)$ と表すことが多いのだろう。

いい、このような点 P を、 $P(a, b)$ と書く。また、座標が (a, b) である点を、単に点 (a, b) ということがある。このようにして座標を定めた平面を**座標平面**という。

関数 $y = f(x)$ を座標平面上の図形として表したものが**グラフ**である。1次関数 $y = ax + b$ のグラフは、傾きが a で、切片が b の直線である。このグラフを直線 $y = ax + b$ ということもある。また、 $y = ax + b$ をこの**直線の方程式**という。一般に、関数 $y = f(x)$ のグラフとは、関係 $y = f(x)$ を満たすような点 $(x, f(x))$ 全体で作られる図形のことである。また、関数の定義 x の値に対応して y がとる値の範囲をこの関数の**値域**という。

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の**最大値**という。また、最小の値があるとき、その値を関数の**最小値**という。

1.2 2次関数のグラフ

2次関数 $y = ax^2$ のグラフには、次のような特徴がある：

1. 原点を通り、 y 軸に関して対称な曲線である。
2. $a > 0$ のとき、上に開いている。
3. $a < 0$ のとき、下に開いている。

2次関数 $y = ax^2$ のグラフの形の曲線を**放物線**という。放物線は限りなくのびた曲線であり、また対称の軸をもつ。この軸を放物線の**軸**といい、放物線とその軸の交点を放物線の**頂点**という。上に開いた形の放物線は**下に凸**であるといい、下に開いた形の放物線は**上に凸**であるという。2次関数 $y = ax^2$ のグラフについてまとめると、次のようになる：

2次関数のグラフ

グラフは放物線で、軸は y 軸、頂点は原点である。 $a > 0$ のとき、下に凸、 $a < 0$ のとき、上に凸。

平面上で、図形上の各点を一定の向きに一定の距離だけ動かすことを、**平行移動**という。2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフについて、一般に、次のことが言える：

2次関数

2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、点 (p, q) が頂点となるように平行移動した放物線である。その軸は直線 $x = p$ である。

x の2次式を、上の等式のような形に変形することを、**平方完成**という。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ともいう。また、 $y = ax^2 + bx + c$ をこの放物線の方程式という。一般に、 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを平行移動

した放物線である。

1.3 2次方程式

$a \neq 0$ であるとする。このとき、

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

なので、 $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が得られる。方程式における実数の解を、単に**実数解**という。2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、 $b^2 - 4ac$ を**判別式**といい、 $b^2 - 4ac = 0$ のときの解を**重解**という。

1.4 複素数とその計算

2乗して -1 になる新しい数を1つ考え、これを文字 i で表す：

$$i^2 = -1.$$

そして、 i と2つの実数 a, b を用いて $a + ib$ の形で表される数を考える。この数を**複素数**という。複素数 $a + ib$ では、 a をその**実部**、 b をその**虚部**、 i を**虚数単位**という。実数全体が複素数全体に含まれるように、 $b = 0$ のときの複素数は、実数 a を表すものとする。 $b \neq 0$ のときの複素数を**虚数**といい、とくに $a = 0$ である虚数 ib を**純虚数**という。

以下、複素数 $a + ib$ や $c + id$ などでは、文字 a, b, c, d は実数を表すものとする。2つの複素数が等しいのは、実部、虚部が、それぞれ一致する場合とする。すなわち、次のように定める：

複素数の相等

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d,$$

2つの複素数 $a + ib, a - ib$ を、互いに**共役な複素数**という。

一般に、複素数の四則計算の結果は、次のようになる：

複素数の四則演算

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i\frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

たとえば、 -3 の平方根は $\sqrt{3}i$ と $-\sqrt{3}i$ である。そこで、 $\sqrt{3}i$ を $\sqrt{-3}$ で表すことにすると、 -3 の平方根は、 $\sqrt{-3}$ と $-\sqrt{-3}$ である。

$a > 0$ とする。一般に、根号の中が負である記号 $\sqrt{-a}$ の意味を次のように定める：

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

1.5 2次方程式の解

a, b, c を実数とする。2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は、 $b^2 - 4ac$ の符号に関係なく解をもつ。方程式の解のうち、実数であるものを実数解といい、虚数であるものを虚数解という。

1.6 解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次のことが成り立つ：

解と係数の関係

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

1.7 剰余の定理と因数定理

整式 $P(x)$ を x の1次式 $x - k$ で割った商が $Q(x)$ 、余りが R であることは、次の式で表される：

$$P(x) = (x - k)Q(x) + R.$$

ここで、次の剰余の定理が成り立つ：

剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - k$ で割った余りは、 $P(k)$ に等しい。

剰余の定理より、次の**因数定理**が成り立つことが理解できる：

因数定理

「整式 $P(x)$ が 1 次式 $x - k$ を因数にもつ」 $\iff P(k) = 0$.

1.8 高次方程式

x の整式 $P(x)$ が n 次式のとき、方程式 $P(x) = 0$ を x の n 次方程式という。また、3 次以上の方程式を高次方程式という。

ある数を 3 乗して a になるとき、その数 a を **3 乗根** という。すなわち、 $x^3 = a$ となる数 x が a の 3 乗根である。

2 演習問題

- 関数 $f(x) = -x^2 + x - 3$ について、 $f(0)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(a+2)$ の値を求めよ。
- 次のような長方形について、 y が x の関数であるものは y を x の式で表せ。また、その関数の定義域を示せ。
 - 縦の長さが 10m、横の長さが x m、面積が y m²
 - 周の長さが 10m、縦の長さが x m、面積が y m²
 - 面積が 10m²、縦の長さが x m、横の長さが y m
 - 縦の長さが x m、面積が y m²
- 次の点は、第何象限の点か。
 - (3, -2)
 - (-4, -4)

4. 関数 $y = 2x + 1$ ($-2 \leq x < 3$) のグラフ³⁾ をかけ。また、その値域を求めよ。

5. 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = -x + 4$ ($-2 \leq x < 2$)

(2) $y = \frac{1}{2}x - 1$ ($x \geq -2$)

6. 次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = 5x^2 - 3$

(2) $y = -(x + 3)^2$

(3) $y = -(x + 3)^2 + 1$

7. 次の 2 次式を平方完成せよ。

(1) $2x^2 - 8x + 1$

(2) $\frac{1}{2}x^2 - x + 3$

(3) $x^2 + 3x - 2$

(4) $-2x^2 + 6x - 1$

8. 次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = 2x^2 + 8x - 1$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$

(3) $y = (x + 2)(2x - 1)$

9. 次の各点を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に -3 だけ移動した点の座標を求めよ。また、この移動に

3) ($-2 \leq x < 3$) とは、関数 $y = 2x + 1$ の定義域である。以後も、定義域は丸括弧で書くことにする。

よって、次の点に移される点の座標を求めよ。

(1) $(3, 5)$

(2) $(-3, -4)$

10. 放物線 $y = 3x^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = 3x^2$ を x 軸方向に 2、 y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(2) 次の放物線は、どのように平行移動すると $y = 3x^2$ に重なるか。

i. $y = 3(x + 1)^2 - 2$

ii. $y = 3x^2 + x - 1$

(3) 点 $(4, -3)$ を、 x 軸、 y 軸、原点に関して、それぞれ対称移動して得られる点の座標を求めよ。

11. 次の 2 次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

(2) $y = -2x^2 - 4x + 5$

12. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 4x - 2$ ($0 \leq x \leq 4$)

(2) $y = -3x^2 + 6x - 5$ ($-1 \leq x \leq 2$)

13. 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = -2x^2 - 4x + 1$ ($-2 \leq x < 1$)

(2) $y = x^2 - 2x + 2$ ($-1 < x < 2$)

14. 次の条件に適するように、定数 a の値を定めよ。

(1) 関数 $y = x^2 - 4x + a$ ($1 \leq x \leq 5$) の最大値が 6 である。

(2) 関数 $y = -x^2 - 4x + a$ の最大値が、関数 $y = x^2 - 4x$ の最小値と一致する。

15. 放物線 $y = -3x^2 + ax + b$ が、2 点 $(1, 1)$ 、 $(2, -8)$ を通る。定数 a 、 b の値を定めよ。

16. $x = 2$ で最小値 -4 をとり、 $x = 0$ のとき、 $y = 4$ となるような x の 2 次関数を求めよ。

17. 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ x の 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-1, 3)$ で、点 $(1, 7)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x = -2$ で、2 点 $(0, 3)$ 、 $(-1, 0)$ を通る。

18. 次の連立 3 元 1 次方程式⁴⁾ を解け：

$$\begin{cases} a - b + 3c = 1 \\ 3a + 7b - c = 8 \\ 2a - 4b + 5c = -2 \end{cases} .$$

19. 2 次関数が 3 点 $(-1, 1)$ 、 $(1, -5)$ 、 $(3, 5)$ を通るとき、その 2 次関数を求めよ。

20. 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2 - 9 = 0$

(2) $5x^2 - 7x - 6 = 0$

(3) $(x - 2)^2 - 3 = 0$

(4) $x^2 - 5x + 3 = 0$

4) 3 文字を含む 1 次方程式を組み合わせた連立方程式を連立 3 元 1 次方程式という。

(5) $-5x^2 + 4x + 2 = 0$

(6) $2x^2 + 4\sqrt{5}x + 10 = 0$

(7) $\sqrt{3}x^2 - 4x - 2 = 0$

(8) $2(x+1)^2 = (x+2)(x+3)$

(9) $2(x+2)^2 - (x+2) - 3 = 0$

(10) $0.2x^2 - 0.5x - 1.2 = 0$

(11) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

21. 2次方程式 $x^2 - 3(k+1)x + k^2 - 4 = 0$ の解の1つが -1 であるとき、定数 k の値と他の解を求めよ。

22. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2 - 5x + 1 = 0$

(2) $-x^2 + 3x - 5 = 0$

(3) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

23. 2次方程式 $x^2 + 6x + 2a - 1 = 0$ が異なる2つの実数解もつとき、定数 a の値の範囲を定めよ。

24. 2次方程式 $4x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ が重解をもつように、定数 k の値を定めよ。また、そのときの重解を求めよ。

25. それぞれの数の2乗の和が77となるような連続する3つの自然数を求めよ。

26. 次の関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y = (x+1)(x-5)$

(2) $y = -2x^2 + 5x - 1$

$$(3) y = 4x^2 - 20x + 25$$

27. 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

$$(1) y = 2x^2 - 4x + 2$$

$$(2) y = -x^2 - x + 12$$

$$(3) y = -3x^2 + 2x - 1$$

28. 2次関数 $y = 2x^2 + 3x - 2k + 1$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき、定数 k の値の範囲を定めよ。

29. 2次関数 $y = x^2 + mx + m + 3$ のグラフが x 軸に接するように、定数 m の値を定めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

30. 次の不等式を解け。

$$(1) 2x - 5 \leq 0$$

$$(2) (x + 1)(x - 2) > 0$$

$$(3) (2x + 3)(3x - 4) \leq 0$$

$$(4) x^2 - 4 < 0$$

$$(5) x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$(6) 2x^2 + 9x + 9 \geq 0$$

$$(7) 3x^2 - \sqrt{7}x - 1 \geq 0$$

$$(8) x^2 + x \leq 3x + 24$$

$$(9) (x - 4)^2 > 0$$

(10) $(x - 4)^2 \geq 0$

(11) $(x - 4)^2 < 0$

(12) $(x - 4)^2 \leq 0$

(13) $9x^2 + 1 \leq 6x$

(14) $x^2 - 2x + 5 \leq 0$

(15)
$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases}$$

31. $5x - 3 \leq 2x^2 < x + 6$

32. 周囲の長さが 20cm の長方形がある。この長方形の面積が 24cm^2 以上となるときの長くない方の辺の長さの範囲を求めよ。

33. 次の等式 $(x - 2y) + i(x - y) = 1 + 4i$ を満たす実数 x 、 y の値を求めよ。

34. 次の計算をせよ。

(1) $(4 - 9i) - (3 - 9i)$

(2) $(1 + 3i)(2 + i)$

(3) $(3 - 2i)^2$

35. 次の複素数と共役な複素数を答えよ。

(1) $5 + 3i$

(2) $2i$

36. 式 $\frac{3+i}{3-i}$ を計算せよ。

37. 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2 + 3x + 10 = 0$

(2) $x^2 - 4x + 8 = 0$

(3) $2(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1 = 0$

(4) $\frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x - 1}{3}$

38. 2次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の解の種類を判別せよ。

39. a は定数とする。2次方程式 $2x^2 - 2ax - a^2 + 3 = 0$ の解の種類を判別せよ。

40. 2次方程式 $4x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$ が重解をもつとき、定数 m の値とその値とその解を求めよ。

41. 2次方程式 $x^2 - x + 7 = m(x + 1)$ が虚数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

42. 次の2次方程式について、2つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(2) $4x^2 + 3x - 9 = 0$

(3) $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{6} = 0$

43. 2次方程式 $2x^2 - 2x + 1 = 0$ の2つの解を α 、 β とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $(\alpha - \beta)^2$

(3) $(1 + \alpha)(1 + \beta)$

44. 2次方程式 $x^2 - 10x + m = 0$ の2つの解の比が $2 : 3$ であるとき、定数 m の値と2つの解を求めよ。

45. 次の2次式 $x^2 + 2x + 5$ を、複素数の範囲で因数分解せよ。

46. 次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。ただし、係数は整数とする。

(1) $\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3}$

(2) $2 + 3i$, $2 - 3i$

47. 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 5、積が -14

(2) 和が 4、積が -1

48. 次の多項式を、[] 内の 1 次式で割った余りを求めよ。

(1) $x^3 - x^2 - 7x - 6$ [$x + 1$]

(2) $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ [$2x - 1$]

49. 多項式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ が、 $x - 1$ を因数にもつことを示し、因数分解せよ。

50. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(2) $2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$

51. 多項式 $6x^3 + ax^2 - 3x - 9$ が、 $2x + 3$ で割り切れるように、定数 a の値を定めよ。

52. 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + 7x^2 + 10x = 0$

(2) $x^3 = -8$

(3) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

(4) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(5) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$

53. 3次方程式 $x^3 + ax + 2 = 0$ が -1 を解にもつとき、定数 a の値を求めよ。

54. 3次方程式 $2x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ が 2 と 3 を解にもつとき、定数 a 、 b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。