古谷数学教室第 5 回

三角比、三角関数

2024 年 4 月 14 日

1　基礎事項

1.1　三角比

直角三角形の鋭角[1] の 1 つを θ とし、斜辺の長さを r、他の辺の長さを図 1 のように、x、y とする。このとき、

$$\frac{y}{r},\quad \frac{x}{r},\quad \frac{y}{x}$$

の各値は、三角形の大きさに関係なく、いずれも角 θ の大きさだけで決まる。これらを、それぞれ θ の**正弦** (sine)、**余弦** (cosine)、**正接** (tangent) といい、$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ と書く。正弦、余弦、正接をまとめて**三角比**という。

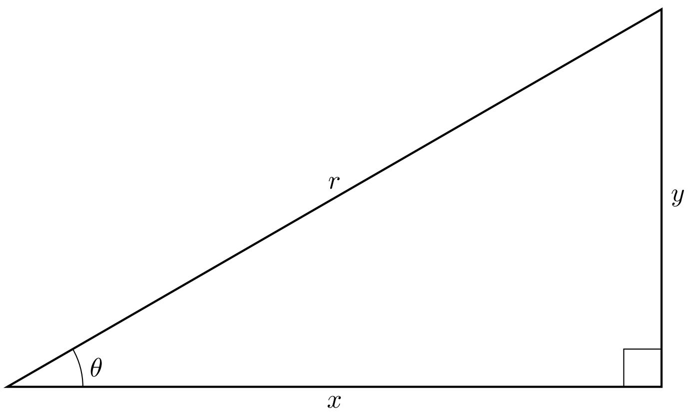


図 1　直角三角形による三角比の定義

1.2　三角比の相互関係

三角比の間に次の関係が成り立つ：

1)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある角 θ を鋭角という。

三角比の相互関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

$(\sin\theta)^2$、$(\cos\theta)^2$、$(\tan\theta)^2$ を、それぞれ $\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$、$\tan^2\theta$ と書くことに注意する。

証明　図 1 より、

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

なので、

$$\tan\theta = \frac{x}{y} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \blacksquare$$

図 1 について、三平方の定理から、

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$r^2(\cos^2 + \sin^2) = r^2$$
$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \quad \blacksquare$$

さらに、$\sin^2 + \cos^2 = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると、

$$\tan^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \blacksquare$$

さらに、鋭角 θ について、次の関係が成り立つ：

$90^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta,$$
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}.$$

1.3　三角比の拡張

これまでは、$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲になる θ についての三角比を扱ってきたが、ここでは、θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に広げて三角比を定義する。

図 2 のように、座標平面上において原点 O を中心とする半径 r の半円をかき、この半円と x の正の部分との交点を A とする。$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲にある θ に対して、$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ となる点 P をこ

の半円上にとり、点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。このとき、θ の三角比を、次の式で定義する：

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

ただし、$\theta = 90^\circ$ のときは $\tan\theta$ は定義されない。

θ の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に広げた場合も、三角比 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ の値は、r の大きさに関係なく、いずれも角 θ の大きさだけで決まる。

一般に、$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の関係が成り立つ：

$180^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta,$$
$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta.$$

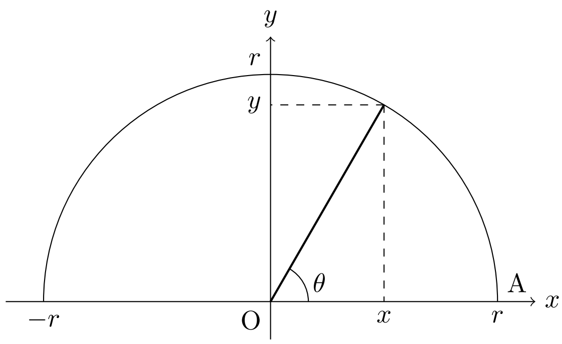


図 2　半円の円周上の点による三角比の定義

1.4　正弦定理

以下では、△ABC において、頂点 A、B、C に向かい合う辺 BC、CA、AB の長さを、それぞれ a、b、c で表す。また、∠A、∠B、∠C の大きさを、それぞれ A、B、C で表す。

△ABC の外接円[2] の半径を R とすると、次の**正弦定理**が成り立つ[4] ：

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

---

2)　三角形の各頂点を通る円を、その三角形の[3]という。

4)　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と書くこともある。

1.5　余弦定理

△ABC において、次の**余弦定理**が成り立つ：

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

△ABC において、$\cos A$ の符号は、$b^2 + c^2 - a^2$ の符号と同じになるので、$b^2 + c^2$ と a^2 の大小によって、次のことが言える：

$$0^\circ < A < 90^\circ \iff b^2 + c^2 > a^2,$$
$$A = 90^\circ \iff b^2 + c^2 = a^2,$$
$$90^\circ < A < 180^\circ \iff b^2 + c^2 < a^2.$$

1.6　三角形の面積

△ABC の面積 S は、次の式で表される：

三角形の面積

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

また、△ABC の面積を S、△ABC の内接円[5] の半径を r とするとき、次が成り立つ：

$$S = \frac{r}{2}(a + b + c).$$

1.7　角の拡張

平面上で、点 O を中心に半直線 OP を回転させるとき、この半直線 OP を**動径**といい、動径の最初の位置を示す半直線 OX を**始線**という。

回転の向きについて、時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**といい、同じ向きを**負の向き**という。また、始線 OX から、正の向きに測った回転の角を**正の角**といい、負の向きに測った回転の角を**負の角**という。

5)　1 つの円が、三角形の 3 辺すべてに接しているとき、この円をこの三角形の**内接円**という。

正の角は、たとえば $+45^\circ$ または 45° と表す。負の角は、たとえば -30° と表す。

また、動径が正の向きに 1 回転すると、360°、2 回転すると 720°、負の向きに 1 回転すると -360° の角を表す。

このように、回転の向きと大きさをもつ角を**一般角**という。

θ を一般角とする。始線 OX から θ だけ回転した位置にある動径 OP を、θ の動径という。

30°、180° などのように、これまで使ってきた度を単位とする角の表し方を 60 分法、または**度数法**という。

これに対して、円における弧の長さに着目した角の測り方がある。円において、半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさを 1 ラジアン、また 1 弧度という。半径 1 の円では、長さ 1 の弧に対する中心角の大きさが 1 ラジアンであり、長さ a の弧に対する中心角の大きさが a ラジアンである。

ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という。

動径の表す角について、弧度法では次のことがいえる：動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると、動径 OP の表す角は $\alpha + 2\pi \cdot n$ である。ただし、n は整数である。

半径 r、中心角 θ ラジアンの扇形の孤の長さを l、面積を S とすると、次のことが成り立つ：

扇形の孤の長さと面積

$$l = r\theta,$$
$$S = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

1.8　三角関数

座標平面上で、図 3 のように x 軸の正の部分に始線をとり、一般角 θ の動径と、原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。このとき、

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定め、それぞれ一般角 θ の正弦、余弦、正接という。

これらはいずれも θ の関数であり、まとめて θ の**三角関数**という。

原点を中心とする半径 1 の円を**単位円**という。

一般角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、$\sin\theta = y$、$\cos\theta = x$ となる。また、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると、$\tan\theta = m$ である。点 P が単位円の周上を動くとき、点 T は直線 $x = 1$ 上のすべての点を動く。以上から、次のことが成り立つ：

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1,$$
$$-1 \leq \cos\theta \leq 1.$$

さらに、$\tan\theta$ の値の範囲は実数全体である。

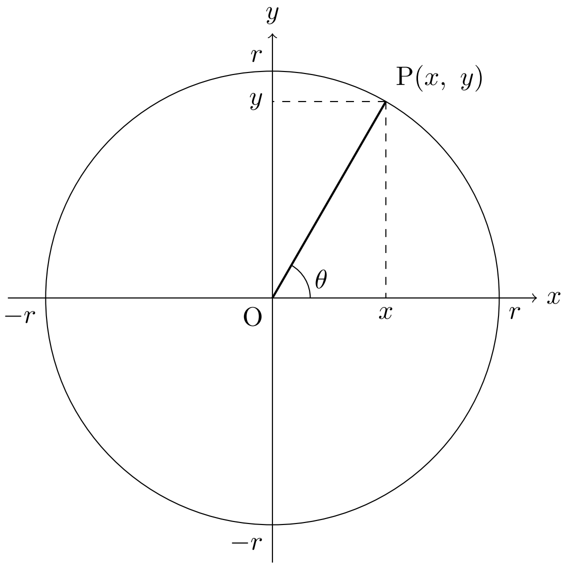
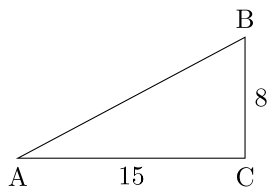


図 3　三角関数の定義

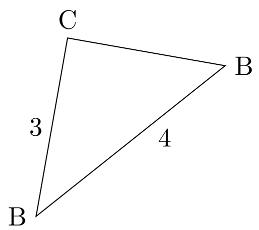
2　演習問題

1. 次の図において、α、β の正弦、余弦、正接の値を求めよ。

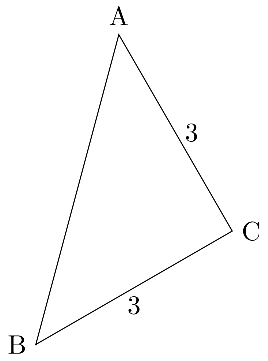
(1) $A=\alpha$、$B=\beta$、$C=90^\circ$



(2) $A=\alpha$、$B=\beta$、$C=90^\circ$



(3) $A=\alpha$、$B=\beta$、$C=90^\circ$



2. 次の x の値、鋭角 θ のおおよその大きさを求めよ。

(1) $x=\sin 35^\circ$

(2) $\sin\theta=0.24$

(3) $\cos\theta=0.9$

(4) $\tan\theta=4.01$

3. $\angle\mathrm{A}=45^\circ$、$\angle\mathrm{C}=90^\circ$、$\mathrm{BC}=2$ であるような、$\triangle\mathrm{ABC}$ について、他の 2 辺の長さを求めよ。

4. ある地点から高さ 40m の建物の屋上を見上げたところ、仰角が 25° であった。その地点と建物との距離は約何 m か。1m 未満は四捨五入して求めよ。

5. θ は鋭角であるとする。$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ のうち 1 つが次の値をとるとき、他の 2 つの値を求めよ。

(1) $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

(2) $\tan\theta=3$

6. $\cos 50^\circ$ を 45° 以下の角の三角比で表せ。

7. 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ$

(2) $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \sin 70^\circ$

8. 次の等式が成り立つことを証明せよ：

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = 1.$$

9. $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) - \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

10. 次の三角比の表を完成させよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

11. $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。条件 $\sin\theta\cos\theta < 0$ を満たす θ は鋭角、鈍角のどちらか答えよ。

12. 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 156^\circ$

(2) $\cos 93^\circ$

(3) $\tan 117^\circ$

13. $\sin 165^\circ$、$\cos 113^\circ$、$\tan 98^\circ$ の三角比の値を求めよ。

14. $\sin 110^\circ + \cos 160^\circ + \tan 10^\circ + \tan 170^\circ$ の値を求めよ。

15. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan\theta = -1$

(3) $2\cos\theta = -\sqrt{3}$

16. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ のうち 1 つが次の値をとるとき、他の 2 つの値を求めよ。

(1) $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$

(2) $\tan\theta = -3$

17. 直線 $y = -x$ と x 軸の正の向きとなす角 θ を求めよ。

18. x 軸の正の向きとなす角が、次のようになる直線の傾きを求めよ。

(1) 120°

(2) 135°

19. $\triangle$ABC において、外接円の半径を R とする。次の問いに答えよ。

(1) $a = 6$、$A = 45^\circ$、$B = 60^\circ$ のとき、b の値を求めよ。

(2) $a = 8$、$B = 30^\circ$、$C = 105^\circ$ のとき、b の値を求めよ。

(3) $A = 135^\circ$、$R = 4$ のとき、a の値を求めよ。

(4) $a = 6$、$B = 70^\circ$、$C = 80^\circ$ のとき、R の値を求めよ。

(5) $c = R$ のとき、C の値を求めよ。

(6) $b = 4$、$c = 2\sqrt{3}$、$A = 30^\circ$ のとき、a の値を求めよ。

(7) $a = 15$、$b = 7$、$c = 13$ のとき、C の値を求めよ。

(8) $a = 4$、$b = \sqrt{13}$、$B = 60^\circ$ のとき、c の値を求めよ。

(9) $b=2\sqrt{2}$、$c=4$、$C=135^\circ$ のとき、a の値を求めよ。

20. 次の 3 つの数を辺の長さとする三角形は、鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるか答えよ。

(1) 4、9、11

(2) 9、10、12

(3) 6、8、10

21. 次のような $\triangle$ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b=7$、$c=8$、$A=45^\circ$

(2) $a=4$、$b=5$、$c=6$

(3) $a=2$、$b=\sqrt{6}-\sqrt{2}$、$A=105^\circ$、$B=30^\circ$

22. $\triangle$ABC の面積を S とする。次のものを求めよ。

(1) $a=6$、$C=30^\circ$、$S=8$ のとき、b

(2) $b=\sqrt{3}$、$c=4$、$S=3$ のとき、A

23. 次の角の動径 OP を図示せよ。また、その動径 OP の表す角を、$\alpha+360^\circ\times n$（n は整数）の形で表せ。ただし、$0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ とする。

(1) 380°

(2) -400°

24. 次の角を弧度法で表せ。

(1) 30°

(2) 60°

25. 次の角を度数法で表せ。

(1) $\dfrac{3}{4}\pi$

(2) 2π

26. 次の角の動径は第何象限にあるか調べよ。

(1) $-\dfrac{5}{6}\pi$

(2) $\dfrac{13}{3}\pi$

27. 次のような扇形の孤の長さと面積を求めよ。

(1) 半径が 5、中心角 $\dfrac{\pi}{3}$

(2) 半径が 4、中心角が $\dfrac{3}{4}\pi$

28. θ が次の値のとき、$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ の値を、それぞれ求めよ。

(1) $\dfrac{2}{3}\pi$

(2) $-\dfrac{5}{6}\pi$

29. $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ のうち、1 つが次のように与えられたとき、他の 2 つの値を求めよ。ただし、[ ] 内は、θ の動径が含まれる象限を表す。

(1) $\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ [第 3 象限]

(2) $\tan\theta = -1$ [第 4 象限]

30. 次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\dfrac{1}{\tan^2\theta} - \cos^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta}$

31. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

(3) $\sin\theta - \cos\theta$

(4) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

32. 次の三角関数の値を、鋭角の三角関数で表し、その値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{5}{3}\pi$

(2) $\cos\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\dfrac{23}{6}\pi\right)$