

古谷数学教室第 6 回

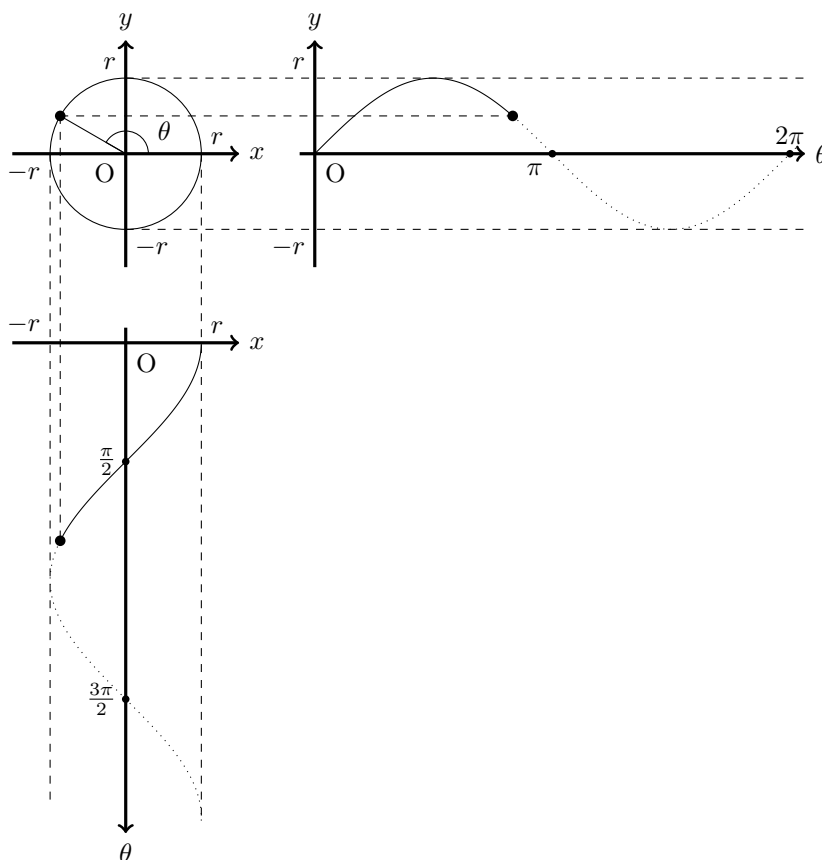
三角関数、図形と方程式

2024 年 4 月 21 日

1 基礎事項

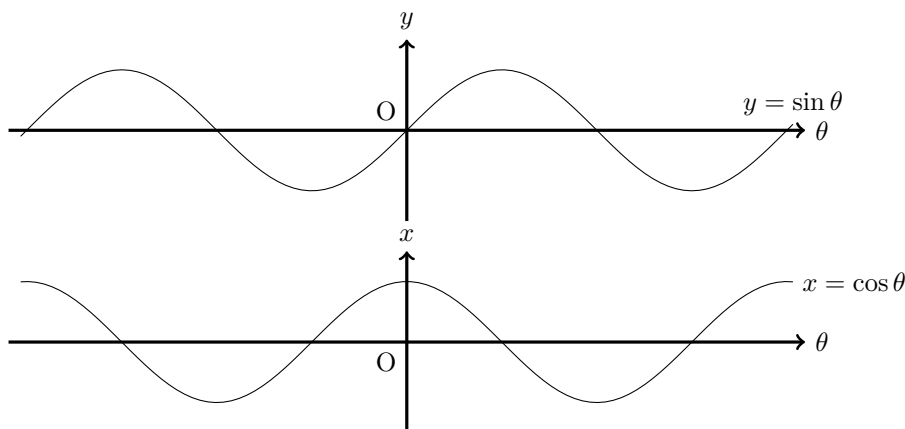
1.1 三角関数のグラフ

一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とすると、 $\sin \theta = y$ 、 $\cos \theta = x$ である¹⁾。これより、関数 $y = \sin \theta$ 、 $x = \cos \theta$ のグラフをかくと、次のようになる。



1) 私の講義では、これを定義としたはず。

$y = \sin \theta$ と $x = \cos \theta$ を見やすく並べると、以下の図のようになる²⁾。



動径は1回転するともとの位置にもどるから、次が成り立つ：

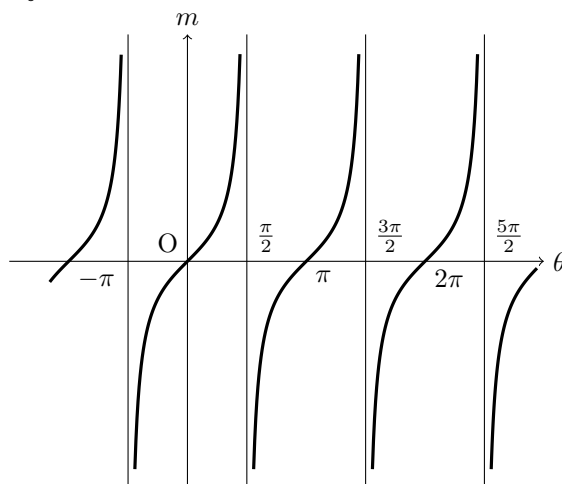
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta.$$

この性質により、関数 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ はいずれも 2π の周期をもつ³⁾ という。

グラフについていうと、 $y = \sin \theta$ 、 $y = \cos \theta$ のグラフは、いずれも 2π ごとに同じ形を繰り返す。さらに、次のことがいえる⁴⁾：

$$\sin \theta = -\sin(-\theta), \quad \cos \theta = \cos(-\theta).$$

関数 $y = \tan \theta$ のグラフについても調べる。一般角 θ の動径と単位円の交点を P とし、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T(1, m) とすると、 $\tan \theta = m$ である。これより、関数 $m = \tan \theta$ のグラフをかくと、次のようになる。



-
- 2) $y = \sin \theta$ のグラフの形を**正弦曲線**または**サインカーブ**という。 $y = \cos \theta$ の正弦曲線であることがわかる。
 - 3) 一般に、関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して、常に $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき、関数 $f(x)$ は p を周期とする**周期関数**であるという。このとき、 $2p$ 、 $3p$ 、 $-p$ なども周期であるが、周期関数の周期といえば、ふつう正の周期のうち最小のものをさす。
 - 4) 日本語にすると、 $y = \sin \theta$ のグラフは原点に関して対称である、 $y = \cos \theta$ のグラフは y 軸に関して対称である、ということを行っている。これは、納得するまで考えること。

$\tan \theta$ は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ では定義されないが、 $y = \tan \theta$ のグラフは θ が $\frac{\pi}{2}$ に限りなく近づくと、直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。グラフが限りなく近づく直線を、そのグラフの漸近線という。関数 $y = \tan \theta$ には、次のような性質がある：

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta.$$

また、漸近線をもつ。

k を正の定数とする。三角関数の周期について、一般に、次のが成り立つ：

$$\sin(k\theta + 2\pi) = \sin k\theta,$$

$$\cos(k\theta + 2\pi) = \cos k\theta,$$

$$\tan(k\theta + \pi) = \tan k\theta.$$

1.2 三角関数の性質

次の等式が成り立つ⁵⁾：

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta,$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta,$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta,$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta,$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta,$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}.$$

1.3 三角関数の加法定理

一般に、正弦、余弦について、次の加法定理が成り立つ：

正弦、余弦の加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

5) なぜ成り立つのか、自分で考えよ。

証明 座標平面における単位円上の点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $Q(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ 、 $R(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ 、 $S(1, 0)$ について、

$$PQ^2 = RS^2$$

より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

が得られ⁶⁾、これより

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

が得られ⁷⁾、 $\cos(-\beta) = \cos \beta$ 、 $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

が得られる。さらに、 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ 、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ より

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

が得られ、

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \cos(-\beta)$$

が得られる。以上より、

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \blacksquare$$

正弦、余弦の加法定理から、次の正弦の加法定理が得られる：

正接の加法定理

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

6) おそらく、ほとんどの学生さんがそうだろうと思うのだが、この式をみて、一瞬で納得できない学生さんへコメントをする。参考書や問題集などで、なぜそれが成り立つのか理解できない場合、「この参考書（問題集）は説明不足だ！」や「分かりにくい！」などと早い段階で諦めてしまうのはもったいない。（そもそも、理解もできていない段階で「分かりにくい」などどどのように判断するのが謎である。「分かっていない」の言い間違いである。）式変形が理解できないとき、それは問題を解くヒントのようなものだと思って、自分で正しいことを確認する癖をつけることを強く勧める。私がこの式を一撃で理解できるのは、（証明した本人だからというのもあるが、）そういう経験を積んだからである。

7) $-\beta \rightarrow \beta$ と読み替えればよい。

証明 $\tan(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha \pm \beta) / \cos(\alpha \pm \beta)$ を利用して、分母分子を $\cos \alpha \cos \beta$ で割ることにより得られる ■

1.4 加法定理の応用

加法定理から明らかに次が成り立つ⁸⁾：

2倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.\end{aligned}$$

また、 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ について、 $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$ と置き換えると、次の式が得られる：

半角の公式

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \\ \tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.\end{aligned}$$

$a \sin \theta + b \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形することを、三角関数を**合成**するという：

三角関数の合成

$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$ 、 $b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha$ とするとき、

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha).$$

1.5 直線上の点

数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、 a を点 P の**座標**といい、座標が a である点 P を $P(a)$ で表す。数直線上の原点 O と点 $P(a)$ の距離 OP は、 a の絶対値 $|a|$ で表される。一般に、2点 $A(a)$ 、 $B(b)$ 間の距離 AB は、次の式で表される：

$$AB = |b - a|.$$

8) 証明は自明なので、省略している。分からない学生さんは、遠慮なく質問に来てください。

m, n は正の数とする。線分 AB 上の点 P が

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に内分するという。また、線分 AB の延長線上の点 Q が

$$AQ : QB = m : n \quad (m \neq n)$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を $m : n$ に外分するという。点 P を線分 AB の内分点、点 Q を線分 AB の外分点という。

2点 $A(a), B(b)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を P 、外分する点を Q とする。このとき、一般に、次のことが成り立つ：

線分の内分点、外分点

$$P\left(\frac{na + mb}{m + n}\right),$$
$$Q\left(\frac{-na + mb}{m - n}\right).$$

1.6 平面上の点

座標平面上の点 P の位置は、2つの実数の組、たとえば (a, b) で表される。この組 (a, b) を点 P の座標といい、 a を x 座標、 b を y 座標という。また、座標が (a, b) である点 P を $P(a, b)$ で表す。

座標平面の座標軸によって4つの部分に分けられる。これらの各部分を象限といい、 $(+, +)$ 、 $(-, +)$ 、 $(-, -)$ 、 $(+, -)$ を含む象限をそれぞれ第1象限、第2象限、第3象限、第4象限という。ただし、 $+$ は任意の正の値、 $-$ は任意の負の値を意味するものとした。座標軸はどの象限にも含まない。

2点 $A(a_x, a_y)$ 、 $B(b_x, b_y)$ とする。一般に、次のことが成り立つ：

2点間の距離

$$AB = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

また、2点 AB を、 $m : n$ に内分する点を P 、 $m : n$ に外分する点を Q とする。このとき、次のことが成り立つ：

内分点、外分点

$$P\left(\frac{na_x + mb_x}{m+n}, \frac{na_y + mb_y}{m+n}\right),$$
$$Q\left(\frac{-na_x + mb_x}{m-n}, \frac{-na_y + mb_y}{m-n}\right).$$

1.7 直線の方程式

一般に、 x 、 y の方程式を満たす点 (x, y) 全体が図形 F であるとき、その方程式を図形 F の方程式という。

点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は、次で表される：

直線の方程式 1

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

異なる 2 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) を通る直線の方程式は、次で表される：

直線の方程式 2

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) & x_1 \neq x_2 \\ x = x_1 & x_1 = x_2 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) & x_1 \neq x_2 \\ x = x_1 & x_1 = x_2 \end{cases}.$$

直線が x 軸、 y 軸とそれぞれ点 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ で交わるとき、 a をこの直線の x 切片、 b をこの直線の y 切片という。

1.8 2 直線の関係

異なる 2 直線 $y = m_1x + k_1$ 、 $y = m_2x + k_2$ について、般に、次のことが言える：

2 直線の平行、垂直

$$m_1 = m_2 \iff \text{「2 直線が平行」},$$
$$m_1 m_2 = -1 \iff \text{「2 直線が垂直」}.$$

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を d とする。このとき、次が成り立つ：

点と直線の距離

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

証明 原点と直線 $ax + by + c = 0$ の距離が

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となることを示す。そのあと、点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ を、 x 軸方向に $-x_1$ 、 y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動したとき、原点と直線 $a(x + x_1) + b(y + y_1) + c = 0$ との距離と点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は等しいことを利用すればよい ■

1.9 円の方程式

点 $C(c_x, c_y)$ から一定の距離 r にある点 P の全体は、 C を中心とする半径 r の円である：

円の方程式

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2.$$

1.10 円と直線

円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2 + bx + c = 0$ とする。この 2 次方程式が実数解をもつとき、円と直線は共有点をもつ。実数解をもたないときは、共有点をもたない。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(p_x, p_y)$ における接線の方程式について、一般に、次のことが成り立つ：

円上の点における接線の方程式

$$p_x x + p_y y = r^2.$$

1.11 2つの円

半径がそれぞれ R 、 r である2つの円の中心間の距離を d とする。このとき、 $R > r$ とすると、2つの円の位置関係について、次のようになる⁹⁾：

1. $d > R + r$ のとき、一方が他方の外部になる。
2. $d = R + r$ のとき、外接する。
3. $R - r < d < R + r$ のとき、2点で交わる。
4. $d = R - r$ のとき、内接する。
5. $d < R - r$ のとき、一方が他方の内部にある。

1.12 軌跡と方程式

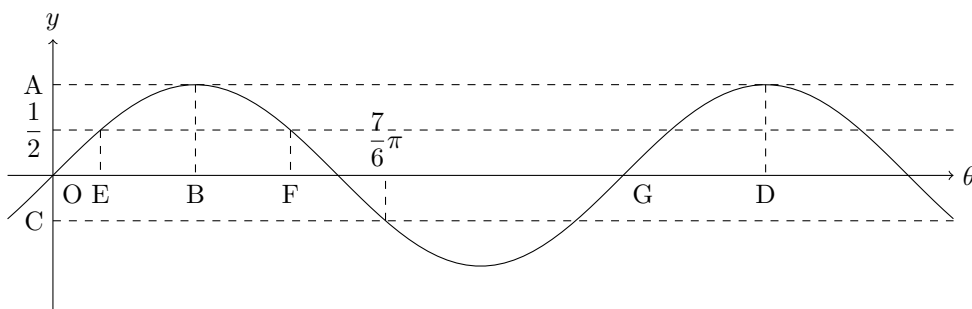
一般に、ある条件を満たしながら動く点が描く図形を、その条件を満たす点の軌跡という。

1.13 不等式の表す領域

座標平面上で、 x 、 y の不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合を、その不等式の表す領域という。

2 演習問題

1. 下の図は、関数 $y = \sin \theta$ のグラフである。図中の目盛り A から G の値を求めよ。



2. 次の関数の周期を求め、グラフをかけ。また、それぞれ [] 内のグラフとどのような位置関係にあるか答えよ。

9) これを覚えようとは思わない方が良い。絵を描けば理解できる。

(1) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ [$y = \cos \theta$]

(2) $y = \cos \theta - 1$ [$y = \cos \theta$]

(3) $y = 4 \sin \theta$ [$y = \sin \theta$]

(4) $y = 2 \sin 2\theta$ [$y = \sin \theta$]

3. 関数 $y = 3 \cos(4\theta - 3\pi)$ のグラフは、 $y = \cos 4\theta$ のグラフを θ 軸方向に α だけ平行移動し、 θ 軸をもとにして y 軸方向に β 倍に拡大したものである。また、この関数の周期は γ である。このとき、 α 、 β 、 γ を求めよ。

4. $y = 3 \sin\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ の関数のグラフをかけ。また、その周期を答えよ。

5. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。また、 θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\cos \theta = \frac{1}{2}$

(2) $2 \sin \theta = -1$

(3) $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$

6. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2 \cos \theta + \sqrt{2} > 0$

(3) $\tan \theta + \sqrt{3} < 0$

7. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 255^\circ$

(2) $\tan 195^\circ$

(3) $\cos \frac{13}{12}\pi$

8. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする。次の値を求めよ。

(1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$

(2) $\tan \alpha = 1$, $\tan \beta = -2$ のとき、 $\tan(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$

9. $y = \frac{3}{2}x$ と $y = -5x$ のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

10. 次の値を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ のとき、 $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$

(2) $\tan \alpha = 4$ のとき、 $\tan 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$

(3) $\sin \frac{\pi}{12}$

(4) $0 > \alpha > -\frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ のとき、 $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$

(5) $\pi < \alpha < \frac{2}{3}\pi$, $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ のとき、 $\cos \alpha$, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\pi}{2}$

11. 次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

(2) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan 2\alpha}$

12. 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$, $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

(1) $-2 \sin \theta + 2 \cos \theta$

(2) $\sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$

(3) $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$

13. $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。
14. $0 < x < 2\pi$ のとき、次の関数 $y = \sin x - \cos x$ の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。
15. A(5)、B(-1) の 2 点間の距離を求めよ。
16. 2 点 A(-1)、B(7) を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。
- (1) 5 : 3 に内分する点
 - (2) 中点
 - (3) 5 : 3 に外分する点
 - (4) 3 : 5 に外分する点
17. 次の 2 点間の距離を求めよ。
- (1) (0, 0)、(3, 4)
 - (2) (-1, 3)、(4, 15)
18. 3 点 A(5, 2)、B(4, 0)、C(0, 2) を頂点とする $\triangle ABC$ は、直角三角形であることを示せ。
19. 2 点 A(-1, 4)、B(5, -2) を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。
- (1) 2 : 1 に内分、外分する点
 - (2) 中点
20. (0, 1)、(1, -3)、(2, -1) の 3 点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。
21. 点 A(-1, 6) に関して、点 P(3, 4) と対称な点 Q の座標を求めよ。
22. 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-1, 2)$ を通り、傾きが 3

(2) 点 $(-2, 3)$ を通り、 x 軸に垂直

23. 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(-4, 3)$ 、 $(6, -3)$

(2) $(2, 5)$ 、 $(-3, 5)$

(3) $(-2, 4)$ 、 $(-2, -1)$

(4) $(-3, 0)$ 、 $(0, 5)$

24. 2 直線 $y = 3x$ 、 $x + 3y - 6 = 0$ は、それぞれ平行、垂直のいずれであるか答えよ。

25. 点 $(-1, 3)$ を通り、次の直線に平行な直線、垂直な直線の方程式を、それぞれ求めよ。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $x = 6$

26. 直線 $3x - 2y + 1 = 0$ に関して、点 $(2, -3)$ と対称な点の座標を求めよ。

27. 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) $(1, 2)$ 、 $x - 2y + 8 = 0$

(2) $(-2, 5)$ 、 $x = 3$

28. 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(2, 1)$ で原点を通る。

(2) 中心が $(1, 3)$ で x 軸に接する。

(3) 直径の両端が $(2, 5)$ 、 $(4, -7)$ である。

29. 次の方程式はどのような図形を表すか答えよ。

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 10 = 0$

(2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0$

30. 3点 $(1, 0)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(3, -3)$ を通る円の方程式を求めよ。

31. 次の円と直線の位置関係（異なる 2 点で交わる、接する、共有点を持たない）を調べよ。また、共有点があるときは、その座標を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 5$ 、 $y = 3x - 5$

(2) $x^2 + y^2 = 2$ 、 $x + y = 2$

(3) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 、 $x + 2y + 6 = 0$

32. 次の円の、円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 34$ 、 $P(3, -5)$

(2) $x^2 + y^2 = 1$ 、 $P(1, 0)$

33. 点 $(2, 1)$ を中心とし、直線 $4x - 3y + 2 = 0$ に接する円の方程式を求めよ。

34. 次の 2 つの円の位置関係（異なる 2 点で交わる、接する、共有点を持たない）を調べよ。

(1) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 、 $(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 25$

(2) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 、 $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 、 $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$

35. 中心が $(6, 8)$ で、円 $x^2 + y^2 = 49$ と外接する円を求めよ。

36. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1) 点 $(1, 2)$ からの距離が 3 である点 P

(2) O を原点とするとき、直線 OP の傾きが 2 である点 P

(3) 2 定点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ に対して、 $\angle APB = 90^\circ$ となる点 P

(4) 2 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ からの距離の 2 乗の和が 26 の点 P

(5) 3 点 $A(0, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, 2)$ について、 $2AP^2 = BP^2 + CP^2$ である点 P

(6) 2 点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 2)$ からの等距離にある点 P

(7) 2 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(1, 0)$ からの距離の比が $1 : 2$ である点 P

37. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y \geq 4 - 3x$

(2) $2x + y + 2 < 0$

(3) $y < 2$

(4) $x^2 + y^2 \geq 4$

(5) $(x - 1)^2 + y^2 < 1$

(6) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 > 0$

(7)
$$\begin{cases} y > 2x - 1 \\ y < -x + 5 \end{cases}$$

(8) $4 < x^2 + y^2 \leq 16$

$$(9) (2x + y - 4)(x - y + 1) \leq 0$$

$$(10) (y - x)(x^2 + y^2 - 1) > 0$$